华章数学译丛

7

# An Elementary Introduction to Mathematical Finance

## Options and Other Topics
(Second Edition)

# 数理金融初步

（原书第2版）


（美） Sheldon M. Ross 著
加州大学伯克利分校
陈典发 等译



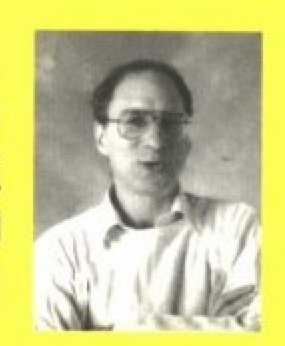


机械工业出版社
China Machine Press

# 数理金融初步（原书第2版）

本书全面介绍数理金融学的基本问题。数理推导严密，内容深入浅出，易于数学基础一般的读者阅读。本书清晰简洁地阐述了套利、Black-Scholes期权定价公式以及效用函数、最优资产组合原理、资本资产定价模型等知识。本书第2版引入了许多新的特色，新增了关于金融最优化方法、风险价值系统（VaR）和条件风险价值系统、Black-Scholes方程的简化推导方法、Black-Scholes期权成本函数偏导数的推导、Black-Scholes公式计算方法、三种带红利的欧式买入期权模型、一种新的简单可操作的波动参数估计方法等内容。

## 作者简介

**Sheldon M. Ross** 美国加州大学伯克利分校工业工程与运筹学系教授，他于1968年在斯坦福大学获得统计学博士学位，之后一直在加州大学伯克利分校任教。他发表了大量有关概率与统计方面的学术论文，并出版了多种教材。他还创办了《Probability in the Engineering and Informational Sciences》杂志并一直担任主编。他是数理统计学会会员，荣获过美国科学家Humboldt奖。


## An Elementary Introduction to Mathematical Finance

Options and Other Topics

(Second Edition)





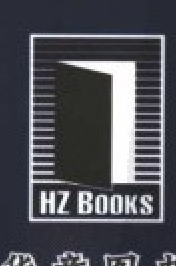
ISBN 7-111-13867-8

定价：29.00 元






封面设计 陈子平


华章图书


华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

北京市西城区百万庄南街1号 100037

读者服务热线：(010)68995259，68995264

读者服务信箱：hzedu@hzbook.com

ISBN 7-111-16120-3/O・418

定价：26.00 元

华章数学译丛

7

# An Elementary Introduction to Mathematical Finance

## Options and Other Topics

(Second Edition)

# 数理金融初步

（原书第2版）

（美）Sheldon M. Ross 著
加州大学伯克利分校
陈典发 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书清晰简洁地阐述了数理金融学的基本问题，主要包括套利、Black-Scholes 期权定价公式以及效用函数、最优资产组合原理、资本资产定价模型等知识，并将书中所讨论的问题的经济背景、解决这些问题的数学方法和基本思想系统地展示给读者.

本书内容选择得当、结构安排合理，既适合作为高等院校学生(包括财经类专业及应用数学专业)的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读.

Sheldon M. Ross: An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics, Second Edition (ISBN 0-521-81429-4).

Originally published by Cambridge University Press in 2003.

This Chinese edition is published with the permission of the Syndicate of the Press of the University of Cambridge, Cambridge, England.



**本书版权登记号：图字：01-2004-0612**

**图书在版编目(CIP)数据**

数理金融初步(原书第 2 版)/(美)罗斯(Ross, S. M.)著；陈典发等译. —北京：机械工业出版社，2005.4

(华章数学译丛)

书名原文：An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics, Second Edition

ISBN 7-111-16120-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.①罗…②陈…　Ⅲ.金融学：数理经济学　Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 016514 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑：方　敏　迟振春
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・12.75 印张
印数：0 001-4 000 册
定价：26.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：(010)68326294

# 译 者 序

近几年来国内外出版了很多有关金融工程和数理金融方面的专著和教科书，然而这些书中，凡稍具理论性的，在阐述其主要内容(如关于期权的定价理论等)时，大都直接或间接地使用了随机微分方程等现代概率论知识，并且要么把这些知识当成读者已知的东西，要么让读者用比较初等的方式去理解它们. 而另一方面，目前一般大学本科生所掌握的数学工具主要是微积分、代数和初等概率论，此类著作中涉及的现代概率论知识远远超出了包括数学专业在内的大学生的知识范畴，所以用这类书作教材往往使学生感到无所适从. 很多从事相关课程教学的教师都深感缺乏一本合适的教科书，而在金融投资部门从事实际工作的很多人也感到难以找到一本既比较深入又不太难懂的读物. 本书使人感到眼前一亮. 本书以 Black-Scholes 期权定价理论为核心，比较全面地介绍了数理金融学的基本问题. 书中将读者应该具备的数学基础严格限定在绝大多数本科生的水平，甚至连初等概率和基本的复利理论也从头讲起. 但由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简洁明快地展示给读者，其中某些问题的讲述还具有相当的深度. 此外，作者还非常注意金融实践活动中常用计算技术的介绍，相信那些从事实际工作的读者以及数学基础好一些的人在这方面会大为受益. 本书很适合作为高等院校财经类专业及应用数学专业学生的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读.

我们有幸受机械工业出版社华章分社之托将此书译成中文，希望中文版的出版能给我国更多读者了解数理金融和金融工程带来方便. 参加本书翻译工作的是：冯建芬(第 1，2，3，6，9 章)；甄强(第 4，5，10，11 章)；王硕玉(第 7，8，12，13 章). 全书最后由陈典发负责修改统稿. 书中用到的一些专业术语尚无统一译法，我们在翻译时大致遵照简单易记的原则. 对于有不同译法的术语，例如，option(期权，选择权)，call option(买入期权，看涨期权)，put option(卖出期权，看跌期权)，exotic option(奇异期权，新型期权，复杂期权)，VaR(风险价值，在险价值)，hedging(对冲，套期保值)，payout(支付，损益，收益)等，我们都选择了括号中的第一种译法. 限于时间和水平，难免会有疏漏甚至错误之处，恳请读者指正.

陈典发

2004 年 10 月于南开园

# 前　言

期权(合约)给其持有者按指定条款买进或卖出某种证券的权利(但不是义务). 买入期权(call option)给予买入权利, 而卖出期权(put option)给予卖出权利. 这两种期权都规定有执行价(exercise price)和到期日(exercise time). 此外, 对期权的履行规定了两种标准的条件: 欧式期权仅在到期日能行使权利, 而美式期权行使权利的时间则可为到期日及此前任何时刻. 例如, 若买进一个执行价为 $K$、到期日为 $t$ 的期权, 如果此期权是欧式的, 那么其持有者有权在时刻 $t$ 以价格 $K$ 购买一股标的证券; 而若是美式期权, 持有者则有权在 $t$ 及此前任何时刻进行这种购买.

对一个完善高效的期权市场, 应该有一种有效的计算方法来(至少是近似地)估计各种期权的价值. 对买入期权(不管美式或欧式类型), 用著名的 Black-Scholes 公式可作出这种估计. 该公式假定标的证券价格服从几何布朗运动. 也就是说, 如果该证券在时刻 $y$ 的价格是 $S(y)$, 未来任意指定时刻 $t+y$ 的价格与 $y$ 时刻价格之比独立于到 $y$ 时刻为止的任何历史价格, 并且它具有均值和方差分别为 $t\mu$ 与 $t\sigma^2$ 的对数正态分布. 即: $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ 是均值为 $t\mu$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. Black 和 Scholes 证明了: 当价格服从几何布朗运动假设时, 对买入期权而言, 存在这样一个唯一的价格, 它不允许理想化的交易者凭借某种交易策略在任何情况下都确保获利. 这里, 理想化交易者是指那些能够不花费任何交易成本而连续不断进行交易的人. 也就是说, 当且仅当期权价格由 Black-Scholes 公式给出时, 不存在确定性的赢利(无套利)机会. 此外, 该价格仅依赖于几何布朗运动的方差参数 $\sigma$(还有当前利率、标的证券价格和期权的执行条件), 而与参数 $\mu$ 无关. 由于参数 $\sigma$ 度量了证券的波动性, 故常称其为波动参数.

风险中性投资者是指只使用投资回报的期望现值来估计该项投资的价值的投资者. 如果这类投资者用一个几何布朗运动来模拟某种证券的价格随时间的演化, 从而将涉及该证券的买和卖变成一种公平赌博, 那么这些投资者对于证券买入期权的估价恰好由 Black-Scholes 公式给出. 由于此原因, Black-Scholes 的期权价值也常被称为风险中性价值.

本书的首要目的是导出并解释 Black-Scholes 公式. 然而其推导需要用到某些概率论知识. 前三章重点描述这些知识. 第 1 章介绍概率和概率试验, 此外讨论了随机变量及其期望值和协方差的概念. 这里, 随机变量是指取值由某个概率试验的结果决定的量. 第 2 章介绍正态随机变量, 这类随机变量的概率分布由一条铃形曲线决定. 该章还叙述了中心极限定理, 该定理是概率论中最重要的理论结果, 它告诉我们: 大量随机变量的和可近似为正态随机变量. 第 3 章中介绍几

何布朗运动，给出了其定义，证明了如何从一些更简单过程的极限获得它，还讨论了用它描述证券价格的合理性.

讲述了必要的概率知识之后，在从第 4 章开始的第二部分中，我们介绍利率和现值的概念. 支撑 Black-Scholes 公式的一个关键概念是套利，第 5 章专门讨论它. 在此章中我们说明在包括单时期二项模型在内的各种情况下，如何使用套利进行定价. 第 6 章讨论套利定理，并在多时期二项模型下，使用它导出期权唯一无套利价格的表达式. 在第 7 章，我们使用第 6 章的结果以及第 4 章中提出的几何布朗运动的近似方法，给出了买入期权的 Black-Scholes 定价方程的一种简化推导；此外还讨论了以期权价格作为其参数的函数所具有的性质，以及关于 delta 对冲复制策略的性质. 有关期权的其他性质放在第 8 章讨论，那里我们推导出当标的证券支付红利时相应期权的价格公式；给出了利用多时期二项模型来确定美式卖出期权风险中性近似价格的方法；还讨论了当证券价格模型为一个布朗运动加上某个随机跳跃过程时，相应期权无套利价格的确定问题；此外还给出了关于波动参数的几个不同估计量.

第 9 章指出：在许多情况下，仅仅考虑套利性并不能唯一地确定期权的价格. 此时，起重要作用的是投资者的效用函数以及他们对各种投资可能结果概率的估计. 该章还介绍了均方差分析、风险价值和条件风险价值以及资本资产定价模型等概念. 我们将证明，即使证券价格服从几何布朗运动且买入期权按照 Black-Scholes 公式定价，仍然可能存在下述投资机会：该投资的期望利润为正且标准差相对较小(如果投资者关于几何布朗运动参数 $\mu$ 的估计值与能将所有投资变成公平赌博的值不同，就会出现这种机会).

第 10 章研究金融中某些最优化模型. 第 11 章介绍像障碍期权、亚式期权和回望期权等非标准期权或称“奇异”期权. 我们将说明如何使用蒙特卡罗模拟以及方差减小技术来有效地确定这些期权的几何布朗运动风险中性价值.

即便人们对标的证券几何布朗运动模型的正确性存在疑问，Black-Scholes 公式仍是很有用的. 因为只要我们承认该模型至少是近似有效的，使用该模型就可以给人这样一种观念：期权具有某个适当的价格. 因此，如果期权的实际交易价格低于此公式计算出来的价格，期权相对证券本身来说就是价格低估了，这就会导致人们考虑卖出证券而买入期权(若期权交易价格高于公式计算出来的价格，则会出现相反的现象). 第 12 章将指出：几何布朗运动并不总是能够拟合实际数据，因而需要考虑更一般的模型. 在商品价格情形下，许多交易商执着地相信存在着平均价格回归现象：某些商品的市场价格总是倾向于回复到某个固定的价格. 第 13 章提出一个较几何布朗运动更一般的模型，它可用于模拟这类商品的价格流.

## 本版的新内容

在延续了第 1 版的基本格调和框架的同时，第 2 版增加了以下内容：

- 给出了 Black-Scholes 公式的一个新颖而简洁的推导(7.2 节).
- 提出了 delta 对冲套利策略(7.4 节).
- 给出了 Black-Scholes 期权价格函数偏导数的推导(7.5 节)，这些推导此前未曾出现过，且较文献中的其他推导方法简单.
- 对证券的三种不同红利支付方式，分别推导出了欧式买入期权的无套利价格(8.2 节).
- 给出了波动参数的一种新估计方法. 该方法容易实现，而且相对当前使用的其他方法而言，能产生一个更好的波动参数估计量(8.5.4 节).
- 增加了有关缺乏价格演化模型时套利定价的材料，还有关于买入期权价格作为敲定价的凸函数性质的讨论，以及期权组合性质的讨论(5.2 节).
- 增加了下述情形下买入期权无套利价格的一个新的简单的推导：标的证券的价格演化过程是一个几何布朗运动加上一个随机跳跃. 我们得出一个确切的计算公式(假定跳跃有对数正态分布)，并获得了它的上下界和(一般情形下的)近似公式(8.4 节).
- 第 10 章完全是新的，本章提出了一些金融最优化方法.
- 关于风险价值和条件风险价值一节是新的(9.4 节).
- 增加了许多新的例子和练习.

应提及的一个技术性问题是，我们使用记号 $\log(x)$表示 $x$ 的自然对数，即以 e 为底的对数，这里 e 定义为

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n,$$

其近似值为 2.718 28…

感谢 Ilan Adler 教授和 Shmuel Oren 教授启发性的交谈，感谢 Kyle Lin 先生给了我许多宝贵的评论，还要感谢 Nahoya Takezawa 先生综合性的评价以及他在后面几章数值计算方面所做的工作.



# 目　　录



# 第1章 概 率 论

## 1.1 概率和事件

考虑一个试验，以 $S$ 表示该试验所有可能结果的集合，称之为样本空间. 若试验中有 $m$ 个可能的结果，我们一般把它们记为 1，2，…，$m$，所以 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$. 但是，当处理某些具体样本时，我们通常给它们一个描述性的名称.

**例 1.1a** i)掷一枚硬币的试验，试验的结果为硬币的正面朝上或反面朝上，样本空间为

$$S = \{h, t\},$$

其中 $h$ 代表硬币正面朝上，$t$ 代表反面朝上.

ii)掷两粒骰子的试验，结果由一对数$(i, j)$组成，其中 $i$ 是第一粒骰子掷出的点数，$j$ 是第二粒骰子掷出的点数，这样，此样本空间就包含下述 36 对数：

$$\begin{array}{cccccc}
(1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6), \\
(2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6), \\
(3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6), \\
(4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6), \\
(5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6), \\
(6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6).
\end{array}$$

iii)编号为 1，2，3，…，$r$ 的 $r$ 匹马的赛马试验，比赛结果为马的名次，则样本空间为

$$S = \{1, 2, 3, \cdots, r \text{ 的全部排序}\}.$$



例如，若 $r=4$，比赛名次为 1 号马第一，4 号马第二，2 号马第三，3 号马第四，则对应的样本为$\{1, 4, 2, 3\}$. □

再次考虑样本空间为 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$的试验. 现假定存在实数 $p_1, \cdots, p_m$，满足

$$p_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

且 $p_i$ 为试验出现结果 $i$ 的概率.

**例 1.1b** 在例 1.1a i)中，如果掷出硬币正面和反面的可能性相同，则称硬币是规则的或无偏的，对于一个规则硬币我们有

$$p_h = p_t = 1/2.$$

如果硬币有偏，且正面朝上的可能性是反面朝上的两倍，则有

$$p_h = 2/3, \quad p_t = 1/3.$$

在例 1.1a ii)中，若骰子是均匀的，则所有结果的可能性相同且为

$$p_{(i,j)} = 1/36, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

在例 1.1a iii)中，若 $r=3$，则我们给出了和为 1 的 6 个非负数：

$$p_{1,2,3}, p_{1,3,2}, p_{2,1,3}, p_{2,3,1}, p_{3,1,2}, p_{3,2,1},$$

其中 $p_{i,j,k}$ 表示 $i$ 号马第一，$j$ 号马第二和 $k$ 号马第三的概率. □

由试验可能结果组成的任何集合称为事件. 也就是说，事件是所有可能结果集合 $S$ 的子集. 对任意事件 $A$，如果 $A$ 中的任何结果在试验中出现，我们称事件 $A$ 发生. 若将 $A$ 发生的概率记为 $P(A)$，那么我们可根据下面的等式确定它的值：

2

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i. \tag{1-1}$$

注意这意味着：

$$P(S) = \sum_i p_i = 1. \tag{1-2}$$

换句话说，试验结果属于样本空间的概率为 1，这是一个期望的结果，因为 $S$ 包含了试验中所有可能的结果.

**例 1.1c** 掷一对质量均匀的骰子，如果事件 $A$ 是点数和为 7，则

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

且

$$P(A)=6/36=1/6.$$

若事件 $B$ 表示点数和为 8，则

$$P(B) = p_{(2,6)} + p_{(3,5)} + p_{(4,4)} + p_{(5,3)} + p_{(6,2)} = 5/36.$$

在三匹马的赛马试验中，记事件 $A$ 表示 1 号马赢，则 $A=\{(1,2,3),(1,3,2)\}$，且

$$P(A) = p_{1,2,3} + p_{1,3,2}.$$ □

对于任意事件 $A$，称所有包含在 $S$ 中但不包含在 $A$ 中的事件组成的集合为 $A$ 的补集，记为 $A^c$. 就是说 $A^c$ 发生，当且仅当 $A$ 不发生，由于

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i p_i \\ &= \sum_{i \in A} p_i + \sum_{i \in A^c} p_i \\ &= P(A) + P(A^c), \end{aligned}$$

所以有

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{1-3}$$

即不包含在 $A$ 中的结果出现的概率为 1 减去事件 $A$ 发生的概率. 样本空间 $S$ 的补集为空集 $\varnothing$，即不包含任何结果. 既然 $\varnothing=S^c$，我们由等式(1-2)、(1-3)得到 3

$$P(\varnothing)=0.$$

对任何两个事件 $A$，$B$，定义 $A$，$B$ 的并集为由所有属于 $A$ 或属于 $B$ 的事件组成的集合，记为 $A\cup B$. 相应地我们还可以定义交集 $AB$(或写为 $A\cap B$)，它表示所有同时属于 $A$ 和 $B$ 的结果组成的集合.

**例 1.1d** 掷两粒骰子，设 $A$ 代表点数和为 10 这一事件，$B$ 为两骰子的点数均为大于 3 的偶数，则

$A=\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$，$B=\{(4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$.

因此

$$A\cup B=\{(4,4),(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\},$$
$$AB=\{(4,6),(6,4)\}.$$

□

对于任意事件 $A$，$B$，我们有

$$P(A\cup B)=\sum_{i\in A\cup B}p_i,$$
$$P(A)=\sum_{i\in A}p_i,$$
$$P(B)=\sum_{i\in B}p_i.$$

由于 $A$，$B$ 共有的结果在 $P(A)+P(B)$ 中计算了两次，而在 $P(A\cup B)$ 中只计算一次，所以我们有下面的结果，称之为*概率的加法定理*.

**命题 1.1.1**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

这样，包含在 $A$ 或 $B$ 中的试验结果发生的概率，等于 $A$ 事件发生的概率加上 $B$ 事件发生的概率，减去 $A$ 和 $B$ 同时发生的概率. 4

**例 1.1e** 设今天道-琼斯股票指数上升的概率为 0.54，明天上升的概率为 0.54，今明两天都上升的概率为 0.28. 道-琼斯指数在两天内都不上升的概率是多少?

**解:** 设事件 $A$ 表示指数今天会上升，事件 $B$ 表示指数明天会上升，则两天中指数至少有一天会上升的概率是

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.54+0.54-0.28=0.80.\end{aligned}$$

因此，今明两天都不上升的概率为 $1-0.80=0.20$. □

如果 $AB=\varnothing$，称 $A$ 与 $B$ *相互排斥*或*不相交*. 就是说，不可能同时发生的两

个事件是相互排斥的．由于 $P(\varnothing)=0$，由命题 1.1.1 知，当 $A$，$B$ 互斥时，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

## 1.2 条件概率

设两个小组打算各自生产一个产品，所生产的两个产品都将被分为合格和不合格两个等级．于是这个试验的样本空间包括以下 4 个可能结果：

$$S=\{(a, a), (a, u), (u, a), (u, u)\},$$

这里，例如 $(a, u)$ 代表第一组的产品合格，第二组的产品不合格．设这些结果的概率如下：

$$P(a,a) = 0.54,$$
$$P(a,u) = 0.28,$$
$$P(u,a) = 0.14,$$
$$P(u,u) = 0.04.$$

5

如果我们已获知生产的产品中恰好有一个合格这个信息，那么该合格品是由第一组生产的概率为多少？为确定这一概率，进行以下推理：既然已知只有一个产品合格，则此时的结果只能是 $(a, u)$ 或 $(u, a)$．由于 $(a, u)$ 出现的概率是 $(u, a)$ 出现概率的 2 倍，那么在已知它们中有一个发生这一信息下应仍满足这个条件．因此结果为 $(a, u)$ 的概率为 2/3，结果为 $(u, a)$ 的概率为 1/3.

记 $A=\{(a, u), (a, a)\}$ 表示第一组的产品合格，$B=\{(a, u), (u, a)\}$ 表示仅有一个组的产品合格．在已知只有一个组产品合格的条件下第一组产品合格的概率称为 $A$ 在 $B$ 已发生条件下的条件概率，记为

$$P(A \mid B).$$

$P(A \mid B)$ 的一般公式可以类似以上讨论得到，即若已知事件 $B$ 发生，为使事件 $A$ 也发生，必须使出现的事件同时在 $A$ 和 $B$ 中，也就是说，此事件包含在 $AB$ 中．现在，既然 $B$ 已经发生了，我们可以把 $B$ 看成一个新的样本空间，因此 $AB$ 发生的概率等于 $AB$ 的概率除以 $B$ 的概率，即

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1-4}$$

**例 1.2a** 掷两次硬币，设样本空间 $S=\{(h, h), (h, t), (t, h), (t, t)\}$ 中的四个样本点出现的概率相等，则在下面任一条件下，两次均为正面的条件概率为多少？

a)第一次掷出正面；

b)至少一次掷出正面.

**解**：记 $A=\{(h, h)\}$ 代表两次均为正面的事件；$B=\{(h, h), (h, t)\}$ 代表第一次掷币为正面；$C=\{(h, h), (h, t), (t, h)\}$ 代表至少有一次掷币为正

面，则　6

$$
\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t)\})} \\
&= \frac{1/4}{2/4} \\
&= 1/2
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
P(A \mid C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} \\
&= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})} \\
&= \frac{1/4}{3/4} \\
&= 1/3.
\end{aligned}
$$

许多人会感到惊奇，为何 a)和 b)部分的答案不相同？为了解答案不同的原因，请首先注意，在第一次掷币为正面的条件下，第二次投掷出现正反面仍是等概率的，所以 a)中概率为 1/2. 另一方面，知道至少有一次为正面等价于结果不是$(t, t)$，所以此事件包含三个等可能的结果，即$(h, h)$，$(h, t)$，$(t, h)$，说明 b)部分的概率为 1/3. □

由等式(1-4)得到

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B). \tag{1-5}$$

这表示 $A$，$B$ 同时发生的概率等于 $B$ 发生的概率乘以 $A$ 在 $B$ 发生下发生的条件概率，这个结果称为概率的乘法定理.

**例 1.2b**　取球试验：一个罐里有 16 个球，9 个蓝球，7 个黄球，以不放回的方式从中任取两个球. 如果罐中每个球被取到的概率相同，问取到的两个球都是蓝球的概率是多少？　7

**解**：设 $B_1$，$B_2$ 分别表示第一次和第二次取出的为蓝球. 若已知第一次取出的为蓝球，则第二个球是从剩余 15 个球中取出的，其中 8 个为蓝球，所以 $P(B_2 \mid B_1)=8/15$，$P(B_1)=9/16$，因此

$$P(B_1B_2) = \frac{9}{16}\frac{8}{15} = \frac{3}{10}.$$ □

$A$ 在 $B$ 发生下发生的条件概率不等于 $A$ 的无条件概率. 换句话说，当知道试验的结果为 $B$ 的元素时，通常会改变该结果为 $A$ 的元素这一事件的概率.（如果 $A$ 和 $B$ 相互排斥会出现什么情况?）在 $P(A \mid B)=P(A)$的特殊情形下，我们称

$A$ 独立于 $B$. 由于

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

所以我们看到，当

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1-6}$$

时，$A$ 是独立于 $B$ 的. 式(1-6)的关系对于 $A$，$B$ 是对称的，也就是说当 $A$ 独立于 $B$ 时，$B$ 也独立于 $A$，即 $A$，$B$ 是独立事件.

**例 1.2c** 设一股票当天的收盘价不低于前一天的收盘价的概率为 0.52，且相连两天的价格是相互独立的. 求此后四天内收盘价下跌而第五天不下跌的概率.

**解**：记 $A_i$ 表示第 $i$ 天收盘价下跌的事件. 由独立性，我们有

8

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3A_4A_5^c)&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5^c)\\&=(0.48)^4(0.52)=0.027\,6.\end{aligned}$$ □

## 1.3 随机变量及其期望值

一个数值变量的值若由某个随机试验结果所决定，则称之为**随机变量**. 例如，掷骰子所得点数或多次掷一枚硬币掷出正面的次数，均为随机变量. 由于随机变量的值取决于试验的结果，我们可以赋予它取每个值的概率.

**例 1.3a** 设随机变量 $X$ 表示掷一对骰子掷出的点数之和. $X$ 可能的取值为 2，3，…，12，且它们有以下概率：

$$\begin{aligned}
&P\{X=2\}=P\{(1,1)\}=1/36,\\
&P\{X=3\}=P\{(1,2),(2,1)\}=2/36,\\
&P\{X=4\}=P\{(1,3),(2,2),(3,1)\}=3/36,\\
&P\{X=5\}=P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}=4/36,\\
&P\{X=6\}=P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}=5/36,\\
&P\{X=7\}=P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}=6/36,\\
&P\{X=8\}=P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}=5/36,\\
&P\{X=9\}=P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}=4/36,\\
&P\{X=10\}=P\{(4,6),(5,5),(6,4)\}=3/36,\\
&P\{X=11\}=P\{(5,6),(6,5)\}=2/36,\\
&P\{X=12\}=P\{(6,6)\}=1/36.
\end{aligned}$$ □

设随机变量 $X$ 的可能取值为 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$，则概率集 $P\{X=x_j\}(j=1, \cdots, n)$称为随机变量 $X$ 的**概率分布**. 由于 $X$ 的取值都包含在这些值中，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} = 1.$$

**定义**　设随机变量 $X$ 取值为 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$，$X$ 的期望值记为 $E[X]$，定义如下：

9

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\}.$$

$E[X]$也称为 $X$ 的期望或均值.

换言之，$E[X]$是 $X$ 所有可能取值的加权值，权重等于 $X$ 取相应值的概率.

**例 1.3b**　随机变量 $X$ 表示我们在一次赌博中所赢的金额. 如果我们有 60%的机会输掉 1，有 20%的机会赢得 1，有 20%的机会赢得 2，试求 $E[X]$.

**解：**

$$E[X] = -1(0.6) + 1(0.2) + 2(0.2) = 0.$$

所以，在这次赌博中我们赢的期望数量为 0. 获胜期望值为零的赌博称为公平赌博. □

**例 1.3c**　随机变量 $X$ 取 1 的概率为 $p$，取 0 的概率为$(1-p)$，这样的随机变量称为参数为 $p$ 的贝努里随机变量，其期望值为

$$E[X] = 1(p) + 0(1-p) = p.$$ □

期望值的一个简单且有用的结果是：对于常数 $a$，$b$，有

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{1-7}$$

为证明式(1-7)，设 $Y=aX+b$. 由于 $X=x_j$ 时，$Y=ax_j+b$，所以

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{j=1}^{n}(ax_j + b)P\{X = x_j\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} ax_j P\{X = x_j\} + \sum_{j=1}^{n} bP\{X = x_j\} \\ &= a\sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\} + b\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$

10

另外一个重要的结果是随机变量和的期望值等于随机变量期望值的和.

**命题 1.3.1**　对于随机变量 $X_1$，$X_2$，…，$X_k$，有

$$E\left[\sum_{j=1}^{k} X_j\right] = \sum_{j=1}^{k} E[X_j].$$

**例 1.3d**　考虑 $n$ 个独立试验，每个试验成功的概率为 $p$. 随机变量 $X$ 等于试验成功的个数，称之为参数为 $n$，$p$ 的二项随机变量，可用表达式

$$X=\sum_{j=1}^{n}X_j,$$

确定它的期望值，其中当第 $j$ 次试验成功时 $X_j=1$，失败时 $X_j=0$. 由命题 1.3.1，我们得到

$$E[X]=\sum_{j=1}^{n}E[X_j]=np,$$

最后的等式用到了例 1.3c 的结果. □

如果与随机变量 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 的任何子集有关的概率，其取值不随其他部分概率的取值而改变，则称它们是独立的.

**例 1.3e** 设 $N$ 个球中有 $n$ 个红球，其余的为黑球，依次从中随机取出 $k$ 个球. 若取出的第 $i$ 个球为红球，令 $X_i=1$，若取出的是黑球，令 $X_i=0(i=1,\cdots,k)$. 如果以放回方式取球，则 $X_1$，$X_2$，…，$X_k$ 是独立的，但如果以不放回方式取球，则此 $n$ 个随机变量是不独立的.（为什么？） □

随机变量 $X$ 可能取值的平均值由它的期望值表示，而其散布程度则可由它的方差来度量.

11

**定义** *$X$ 的方差记为 $\mathrm{Var}(X)$，定义为*

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2].$$

换言之，方差等于 $X$ 与它的期望值之差的平方的平均值.

**例 1.3f** 求参数为 $p$ 的贝努里随机变量 $X$ 的方差 $\mathrm{Var}(X)$.

**解：** 因为 $E[X]=p$(见例 1.3c)，所以

$$(X-E[X])^2=\begin{cases}(1-p)^2 & \text{以概率 } p,\\ p^2 & \text{以概率 } 1-p.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E[(X-E[X])^2]\\&=(1-p)^2p+p^2(1-p)\\&=p-p^2.\end{aligned}$$

□

如果 $a$，$b$ 均为常数，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b)&=E[(aX+b-E[aX+b])^2]\\&=E[(aX-aE[X])^2]\quad(\text{由等式(1-7)})\\&=E[a^2(X-E[X])^2]\\&=a^2\mathrm{Var}(X).\end{aligned}\tag{1-8}$$

虽然不是所有的随机变量之和的方差都等于各随机变量的方差之和，但当这些随机变量独立时，结论成立.

**命题 1.3.2**　若 $X_1$，$X_2$，…，$X_k$ 为独立的随机变量，则

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Var}(X_j).$$

**例 1.3g**　求参数为 $n$，$p$ 的二项随机变量 $X$ 的方差.　[12]

**解**：回忆 $X$ 代表 $n$ 次独立试验中成功的次数(每一次成功的概率为 $p$)，它可表示为

$$X=\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

其中若第 $j$ 次成功时令 $X_j=1$，否则令 $X_j=0$. 因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j)\quad(\text{由命题 1.3.2})\\&=\sum_{j=1}^{n}p(1-p)\quad(\text{由例 1.3f})\\&=np(1-p).\end{aligned}$$

□

方差的平方根称为标准差. 我们会看到，随机变量基本上是在距其期望值几倍标准差范围内变化.

## 1.4　协方差和相关性

两个随机变量 $X$，$Y$ 的协方差用 $\mathrm{Cov}(X, Y)$表示，它定义为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])].$$

我们将期望值符号内的乘积展开，然后逐项求期望值，得到

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y].$$

协方差若是正值时表示 $X$，$Y$ 同时增大，若是负值表示一个变量增大时另一个变量减小(独立随机变量间的协方差为 0).

**例 1.4a**　设 $X$，$Y$ 均为贝努里随机变量，均只取 0 或 1. 由等式　[13]

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

并注意到 $XY$ 取 0 还是取 1 决定于 $X$，$Y$ 是否同时取 1，我们有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=P\{X=1,Y=1\}-P\{X=1\}P\{Y=1\}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)>0&\Longleftrightarrow P\{X=1,Y=1\}>P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&\Longleftrightarrow\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}>P\{Y=1\}\\&\Longleftrightarrow P\{Y=1\mid X=1\}>P\{Y=1\}.\end{aligned}$$



也就是说，如果 $X=1$ 增大了 $Y=1$ 的可能性，则二者的协方差为正，反之，则二者的协方差为负. □

容易证明协方差具有下面几个性质. 对于随机变量 $X$，$Y$ 和常数 $c$：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(Y,X),\\
\operatorname{Cov}(X,X) &= \operatorname{Var}(X),\\
\operatorname{Cov}(cX,Y) &= c\operatorname{Cov}(X,Y),\\
\operatorname{Cov}(c,Y) &= 0.
\end{aligned}$$

协方差和期望值一样，也满足线性性质，即

$$\operatorname{Cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{Cov}(X_1,Y)+\operatorname{Cov}(X_2,Y). \tag{1-9}$$

等式(1-9)的证明如下：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1+X_2,Y) &= E[(X_1+X_2)Y]-E[X_1+X_2]E[Y]\\
&= E[X_1Y+X_2Y]-(E[X_1]+E[X_2])E[Y]\\
&= E[X_1Y]-E[X_1]E[Y]+E[X_2Y]-E[X_2]E[Y]\\
&= \operatorname{Cov}(X_1,Y)+\operatorname{Cov}(X_2,Y).
\end{aligned}$$

14

等式(1-9)容易推广为下面很有用的等式：

$$\operatorname{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Cov}(X_i,Y_j). \tag{1-10}$$

由等式(1-10)推出很有用的多个随机变量之和的方差公式：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big) &= \operatorname{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{n}X_j\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Cov}(X_i,X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\operatorname{Cov}(X_i,X_j).
\end{aligned} \tag{1-11}$$

$X$ 的取值随 $Y$ 增大的程度可以用 $X$，$Y$ 间的相关性来衡量，记为 $\rho(X,Y)$，定义如下：

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}.$$

由定义可知，

$$-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1.$$

若 $X$，$Y$ 满足线性关系

$$Y=a+bX$$

则当 $b$ 为正值时，$\rho(X, Y)=1$，当 $b$ 为负值时，$\rho(X, Y)=-1$.

## 1.5 习题

**练习 1.1** 一打字员在打一份报告时，出现 $i$ 个错误的概率为 $p_i(i\geqslant 0)$，15其中

$$p_0=0.20,\quad p_1=0.35,\quad p_2=0.25,\quad p_3=0.15.$$

求打字员出现下列错误的概率：

a)至少 4 个错误；

b)至多 2 个错误.

**练习 1.2** 一个家庭明天的野餐计划会视天气情况是多云还是下雨而决定是否延期. 设出现多云天气的概率为 0.40，出现雨天的概率为 0.30，出现多云兼雨天的概率为 0.20，求野餐不会延期的概率.

**练习 1.3** 如果从 8 位女士和 6 位男士中随机选出 2 人，问出现下列情况的概率是多少?

a)2 人均为女士；

b)2 人均为男士；

c)一位男士和一位女士.

**练习 1.4** 一个俱乐部有 120 位会员，其中 35 人只会下国际象棋，58 人只会打桥牌，27 人既会下国际象棋又会打桥牌. 如果从中随机选出一位会员，请问满足下列条件的概率是多少?

a)该会员会打桥牌，又会下国际象棋；

b)已知该会员会下国际象棋，他又会打桥牌.

**练习 1.5** 囊肿性纤维化(CF)是一种遗传疾病. 一个孩子如果从父母那里各遗传到一个 CF 基因，则他会在十几岁之前发病，而且不会活到成年. 若一个孩子只遗传了一个或没有遗传到这种基因，他就不会发病. 如果一个人携带一个 CF 基因，则其每个孩子都会独立地以 1/2 的概率遗传到这个基因.

a)若父母各携带一个 CF 基因，则他们的孩子发病的概率是多少?

b)如果一个 30 岁的人，他有兄弟姐妹死于这种疾病，他没有发病但携带一个 CF 基因的概率是多少?16

**练习 1.6** 从 52 张扑克牌中随机抽出两张牌. 如果已知两张牌的花色不同，则它们都是 $A$ 的条件概率是多少?

**练习 1.7** 若 $A$，$B$ 独立，证明下列事件也独立：

a)$A$ 和 $B^c$；

b)$A^c$ 和 $B^c$.

**练习 1.8** 一本讲赌博的书对轮盘赌博提出下面的建议：参赌者以 1 赌红，如果出现红色(概率为 18/38)，则其赢得 1 然后退出；如果他输了这一局，可以



进行第二次下注赌红，赌注加倍为2，如果赢了就退出，依次类推．记 $X$ 为参赌者赢的局数．

a)求 $P\{X>0\}$．

b)求 $E[X]$．

**练习 1.9** 四辆公共汽车载着152位学生从同一学校出发去足球场．四辆车分别乘载39，33，46，34位学生．如果从152位学生中任意选取一位，记 $X$ 为被选中的学生所乘坐的汽车里的学生数．四辆公共汽车的司机也随机选取一位，令 $Y$ 为那位司机驾驶的汽车里乘坐的学生人数．

a)你认为 $E[X]$ 和 $E[Y]$ 哪一个大？

b)求出 $E[X]$ 和 $E[Y]$．

**练习 1.10** 两位选手比赛乒乓球，当一个选手赢了两局时比赛结束．设每位选手赢每一局的概率相等，且每一局的结果都是独立的．求比赛总局数的期望值和方差．

**练习 1.11** 证明

[17]

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2.$$

**提示**：从方差的定义

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2],$$

着手，展开右边的平方式，然后利用随机变量和的期望值等于期望值的和这一性质．

**练习 1.12** 一位律师要决定是收取固定费用5 000美元，还是收取胜诉酬金25 000美元(输掉则一无所获)．他估计打赢的概率为0.3．求他收取的费用的均值和标准差，如果

a)收取固定费用；

b)收取胜诉酬金费用．

**练习 1.13** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立的随机变量，具有相同的分布，期望值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$．随机变量 $\overline{X}$ 为这些变量的算术平均值，称为样本均值，写成数学公式为

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}.$$

随机变量 $S^2$ 定义为

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1},$$

称为样本方差．

a) 证明 $E[\overline{X}]=\mu$；

b) 证明 $\mathrm{Var}(\overline{X})=\sigma^2/n$；

c) 证明 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$；

d) 证明 $E[S^2]=\sigma^2$.

**练习 1.14** 证明 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$. [18]

**练习 1.15** 证明

a) $\mathrm{Cov}(X, Y)=\mathrm{Cov}(Y, X)$；

b) $\mathrm{Cov}(X, X)=\mathrm{Var}(X)$；

c) $\mathrm{Cov}(cX, Y)=c\mathrm{Cov}(X, Y)$；

d) $\mathrm{Cov}(c, Y)=0$.

**练习 1.16** 如果 $U$，$V$ 为独立的随机变量，方差均为 1，当 $X$，$Y$ 满足下列条件时，求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$：

$$X=aU+bV, \quad Y=cU+dV.$$

**练习 1.17** 如果 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=ij$，求

a) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_3+X_4)$；

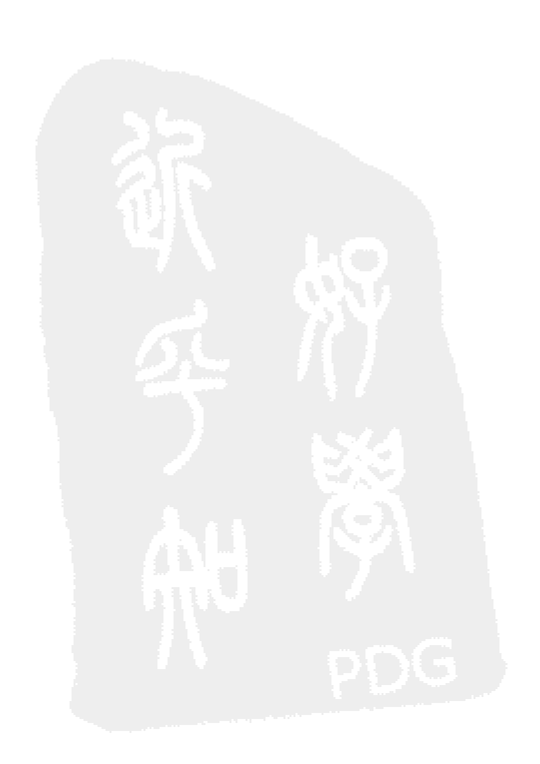
b) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2+X_3, X_2+X_3+X_4)$.

**练习 1.18** 设在任意给定时间段内，某支股票价格只能等概率地增加 1 或减少 1，且不同时期的股票变化是独立的. 记 $X$ 为股票在第一时间段内增加 1 或减少 1 的数量，$Y$ 为前三时间段内累计上升的数量，求 $X$，$Y$ 间的相关性.

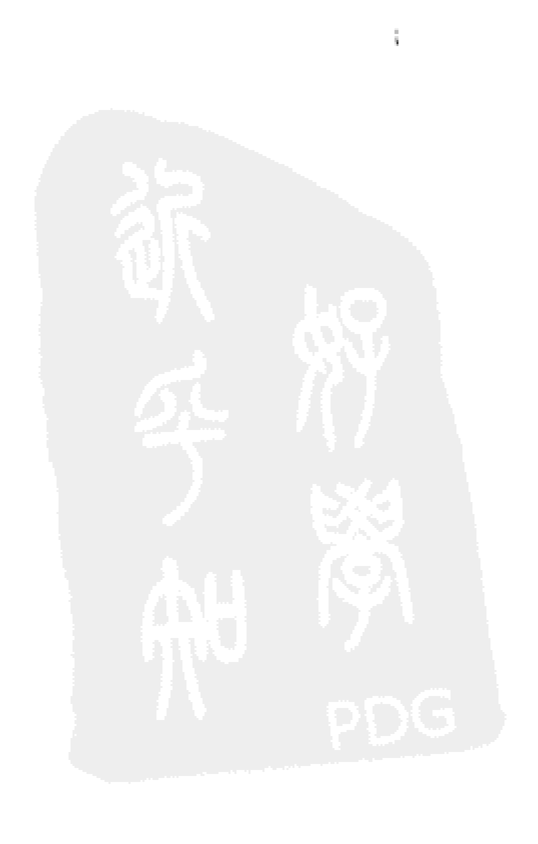
**练习 1.19** 能否构造两个随机变量 $X$，$Y$ 使 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$，$\mathrm{Cov}(X, Y)=2$?

## 参考文献

[1] Ross, S. M. (2002). A *First Course in Probability*[㊀], 6th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. [19]



㊀ 本书中文版即将由机械工业出版社引进出版。



# 第2章　正态随机变量

## 2.1　连续型随机变量

前一章考虑随机变量所取的值都构成离散集合，但实际中还有一些随机变量，它们可能取值的集合是一个连续区间，我们称这样的随机变量为连续型随机变量．例如，完成一个作业需要花费的时间或随机选取的一个人的体重等，一般都被看成是连续型随机变量．

每个连续型随机变量 $X$ 都对应一个函数 $f$，称为 $X$ 的概率密度函数，它按下面的方式决定与 $X$ 有关的概率：对任意实数 $a<b$，曲线 $f$ 下方位于区间$[a, b]$部分的面积等于 $X$ 取值于$a$，$b$之间的概率．即：

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = a \text{ 与 } b \text{ 之间 } f \text{ 与 } x \text{ 轴所围成的面积}$$

图 2-1 给出了一个概率密度函数的图像．

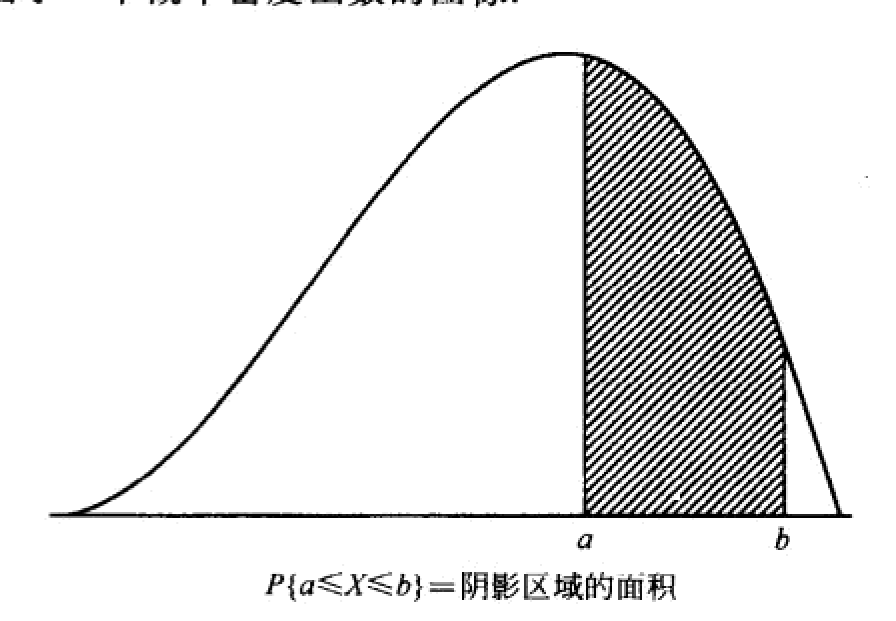



图 2-1　$X$ 的概率密度函数

## 2.2　正态随机变量

一种非常重要的连续型随机变量是正态随机变量．正态随机变量 $X$ 的密度函数由两个参数$\mu$，$\sigma$决定，它由下面公式给出：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

正态概率密度函数是关于 $x=\mu$ 对称的铃型曲线，其变化情况可用$\sigma$来衡量．$\sigma$越大，$f$ 曲线的落差就越大，图 2-2 描述了三个不同的正态概率密度函数，注意曲线随$\sigma$增加而变得平缓．

可以证明，参数 $\mu$，$\sigma^2$ 分别等于变量 $X$ 的期望值和方差，即：

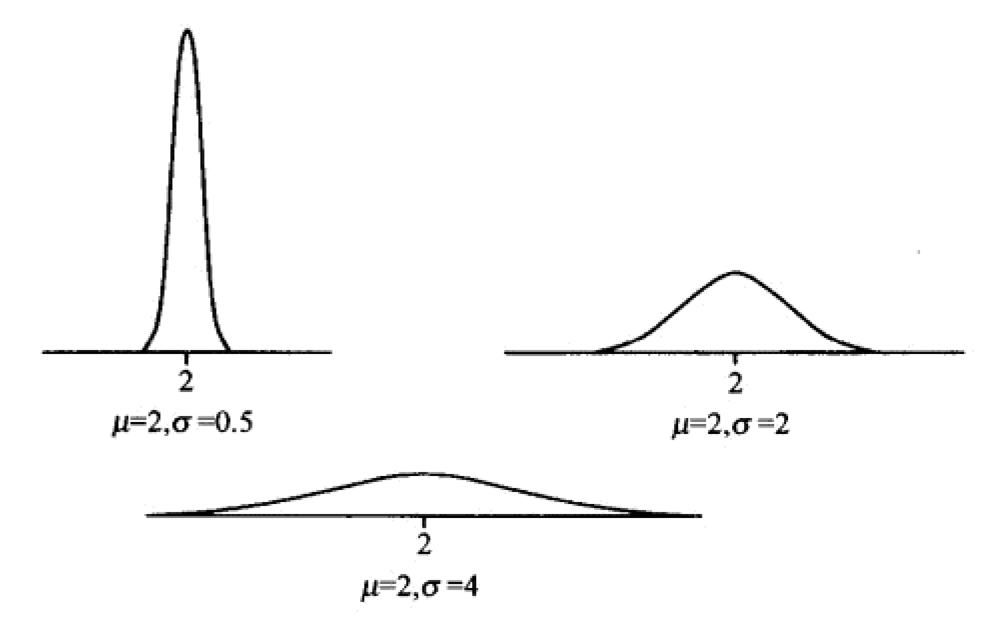



图 2-2　三个正态概率密度函数

20 ~ 21

$$\mu = E[X], \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X).$$

均值为 0 方差为 1 的正态随机变量称为标准正态随机变量. 设 $Z$ 为一标准正态随机变量，定义在实数域上的函数 $\Phi(x)$称为标准正态分布函数，如果满足：

$$\Phi(x) = P\{Z \leqslant x\},$$

于是 $\Phi(x)$代表一个标准正态随机变量小于或等于 $x$ 的概率，它也等于在区间 $(-\infty, x]$上标准正态密度曲线之下的区域面积：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

表 2-1 给出了当 $x>0$ 时相应 $\Phi(x)$的值，$x$ 为负值时的概率可以根据标准正态密度函数的对称性(见图 2-3)求得：

$$P\{Z < -x\} = P\{Z > x\}$$

或等价地，

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

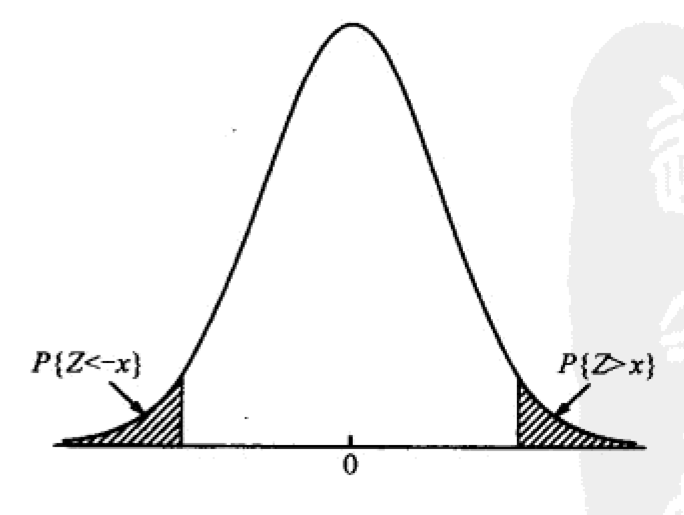



图 2-3　$P\{Z<-x\}=P\{Z>x\}$

表 2-1 $\Phi(x)=P\{Z\leqslant x\}$

| $x$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

**例 2.2a** 设 $Z$ 为一标准正态随机变量，对 $a<b$，将 $P\{a<Z\leqslant b\}$ 用 $\Phi$ 表示.

**解：** 由于

$$P\{Z\leqslant b\}=P\{Z\leqslant a\}+P\{a<Z\leqslant b\},$$

所以,

$$P\{a < Z \leqslant b\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$ □

**例 2.2b** 由 $\Phi(x)$的取值表(精确到小数点后四位)知,

$$P\{|Z| \leqslant 1\} = P\{-1 \leqslant Z \leqslant 1\} = 0.6826,$$
$$P\{|Z| \leqslant 2\} = P\{-2 \leqslant Z \leqslant 2\} = 0.9544,$$
$$P\{|Z| \leqslant 3\} = P\{-3 \leqslant Z \leqslant 3\} = 0.9974.$$ □

当需要比表 2-1 中更精确的值时,用下面的公式来近似求 $\Phi(x)$,可以精确到小数点后六位:对 $x>0$,

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5),$$

其中

$$y = \frac{1}{1 + 0.2316419x},$$
$$a_1 = 0.319381530,$$
$$a_2 = -0.356563782,$$
$$a_3 = 1.781477937,$$
$$a_4 = -1.821255978,$$
$$a_5 = 1.330274429,$$

且

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

## 2.3 正态随机变量的性质

正态随机变量的一个重要性质是:如果 $X$ 为正态随机变量,则对任何常数 $a$, $b$, $aX+b$ 也是正态随机变量. 此性质使我们可以将任一正态随机变量转换成标准正态随机变量. 事实上,设 $X$ 是均值为 $\mu$,方差为 $\sigma^2$ 的正态随机变量,令

22~24

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

则由等式(1-7)、(1-8),$Z$ 的均值为 0,方差为 1,即 $Z$ 为标准正态随机变量. 由此,我们可以利用标准正态分布函数 $\Phi$ 来计算任意正态随机变量的概率分布.

**例 2.3a** 对六年级学生的 IQ 测验成绩服从均值为 100,标准差为 14.2 的正态分布. 问随机抽出一个六年级学生其 IQ 成绩大于 130 的概率是多少?

**解**：设 $X$ 为随机抽出的六年级学生的IQ成绩，则：

$$P\{X>130\}=P\left\{\frac{X-100}{14.2}>\frac{130-100}{14.2}\right\}$$
$$=P\left\{\frac{X-100}{14.2}>2.113\right\}$$
$$=1-\Phi(2.113)$$
$$=0.017.$$

□

**例 2.3b** 设 $X$ 为正态随机变量，均值为 $\mu$，标准差为 $\sigma$，则：

$$|X-\mu|\leqslant a\sigma$$

这等价于：

$$\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\leqslant a,$$

从例 2.2b 知，随机变量以 68.26%的概率取值在其均值的 1 倍标准差范围内，以 95.44%的概率取值于均值的 2 倍标准差范围内，以 99.74%的概率取值于均值的 3 倍标准差范围内. □

正态随机变量的另外一个重要性质是：独立正态随机变量的和仍然是正态随机变量. 即，若 $X_1$，$X_2$ 为独立的正态随机变量，二者的均值分别为 $\mu_1$，$\mu_2$，标准差分别为 $\sigma_1$，$\sigma_2$，则 $X_1+X_2$ 也是正态的，其均值为：

$$E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]=\mu_1+\mu_2$$

25

方差为：

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=\sigma_1^2+\sigma_2^2.$$

**例 2.3c** 俄亥俄州的克利夫兰每年的降雨量服从均值为 40.14 英寸，标准差为 8.7 英寸的正态分布，求连续两年的降雨量之和超过 84 英寸的概率.

**解**：设 $X_i$ 为第 $i$ 年的降雨量($i=1, 2$)，且假设相继年间的降雨量是独立的，则 $X_1+X_2$ 是正态的，均值为 80.28，方差为 $2(8.7)^2=151.38$. 设 $Z$ 为标准正态随机变量，则：

$$P\{X_1+X_2>84\}=P\left\{Z>\frac{84-80.28}{\sqrt{151.38}}\right\}$$
$$=P\{Z>0.3023\}$$
$$\approx 0.3812.$$

□

称随机变量 $Y$ 为以 $\mu$ 和 $\sigma$ 为参数的对数正态随机变量，如果 $\log(Y)$是均值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$ 的正态随机变量. 即 $Y$ 为对数正态的，如果它可以表示为：

$$Y=\mathrm{e}^X$$

其中 $X$ 为正态随机变量，对数正态分布的均值和方差为：

$$E[Y] = e^{\mu+\sigma^2/2},$$
$$\mathrm{Var}(Y) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

**例 2.3d** 给定初始时间，设 $S(n)$ 为某证券在 $n$ 周后的价格（$n\geqslant 1$），一个模拟这些价格变化的常用模型是假设价格比率 $S(n)/S(n-1)$（$n\geqslant 1$）是独立同分布的对数正态随机变量，设参数 $\mu=0.016\,5$，$\sigma=0.073\,0$，求以下事件的概率：

a)此后两个星期证券价格连续上升；

26

b)两周后的证券价格高于今天的价格.

**解：** 设 $Z$ 为标准正态随机变量. 为求 a)的概率，注意到 $\log(x)$ 为 $x$ 的增函数，且 $x>1$ 当且仅当 $\log(x)>\log(1)=0$. 所以，我们有：

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\} &= P\left\{\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}\\ &= P\left\{Z>\frac{-0.016\,5}{0.073\,0}\right\}\\ &= P\{Z>-0.226\,0\}\\ &= P\{Z<0.226\,0\}\\ &\approx 0.589\,4.\end{aligned}$$

因此，一周后价格上升的概率为 0.589 4，由于相邻的价格比率是独立的，所以连续两周价格上升的概率为 $(0.589\,4)^2=0.347\,4$.

下面解问题 b)，由于：

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{S(2)}{S(0)}>1\right\} &= P\left\{\frac{S(2)}{S(1)}\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\}\\ &= P\left\{\log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right)+\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}\\ &= P\left\{Z>\frac{-0.033\,0}{0.073\,0\sqrt{2}}\right\}\\ &= P\{Z>-0.319\,65\}\\ &= P\{Z<0.319\,65\}\\ &\approx 0.625\,4,\end{aligned}$$

这里我们用到以下事实：作为两个均值为 0.016 5，标准差为 0.073 0 的独立正态随机变量的和，随机变量 $\log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right)+\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)$ 是均值为 0.033 0，方差为 $2(0.073\,0)^2$ 的正态随机变量. □

## 2.4 中心极限定理

正态随机变量的普遍性可以用中心极限定理来解释，此定理是概率论中一个最重要的结果．它告诉我们：大量独立同分布的随机变量之和所构成的随机变量近似于一个正态随机变量． 27

为了更确切地叙述中心极限定理，设 $X_1$，$X_2$，…为独立同分布的随机变量序列，它们共同的均值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$，记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

**中心极限定理** 对足够大的 $n$，$S_n$ 近似于均值为 $n\mu$，方差为 $n\sigma^2$ 的正态随机变量，即对任意 $x$，我们有：

$$P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right\} \approx \Phi(x),$$

且随着 $n$ 的逐步增大，近似程度变得越来越高．

设 $X$ 是参数为 $n$，$p$ 的二项随机变量，由于 $X$ 代表 $n$ 个独立试验成功的次数，每一次成功的概率为 $p$，$X$ 可表示为：

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

其中 $X_i$ 当第 $i$ 次试验成功时取 1，否则取 0，由于(根据 1.3 节)：

$$E[X_i] = p,\ \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p),$$

根据中心极限定理，当 $n$ 很大时，$X$ 近似服从均值为 $np$，方差为 $np(1-p)$ 的正态分布．

**例 2.4a** 掷一均匀硬币 100 次，求出现正面的次数小于 40 的概率．

**解**：设 $X$ 为出现正面的次数，则 $X$ 是参数 $n=100$，$p=1/2$ 的二项随机变量，由于 $np=50$，$np(1-p)=25$，所以 28

$$\begin{aligned} P\{X < 40\} &= P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}} < \frac{40-50}{\sqrt{25}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}} < -2\right\} \\ &\approx \Phi(-2) \\ &= 0.022\,8. \end{aligned}$$

用计算机程序计算二项概率得到的准确结果为 0.017 6，所以上面的近似效果不是很好．但我们注意到，$X$ 是一个取整数值的随机变量，事件 $X<40$ 等价于 $X<39+c, 0<c\leqslant 1$．所以，我们可以通过计算 $P\{X<39.5\}$ 获得更好的近似值，即：

$$\begin{aligned}P\{X<39.5\}&=P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}}<\frac{39.5-50}{\sqrt{25}}\right\}\\&=P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}}<-2.1\right\}\\&\approx\Phi(-2.1)\\&=0.0179,\end{aligned}$$

可以看到，近似程度确实有了很大的提高. □

## 2.5 习题

**练习 2.1** 对标准正态随机变量 $Z$，求：

a) $P\{Z<-0.66\}$；

b) $P\{|Z|<1.64\}$；

c) $P\{|Z|>2.20\}$.

**练习 2.2** $Z$ 为标准正态随机变量，求 $x$ 的值，使它满足：

29

$$P\{-2<Z<-1\}=P\{1<Z<x\}.$$

**练习 2.3** 设 $Z$ 为标准正态随机变量，证明：

$$P\{|Z|>x\}=2P\{Z>x\}(x>0).$$

**练习 2.4** 设 $X$ 为正态随机变量，均值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$，$Y=a+bX$，如果 $Y$ 和 $X$ 服从相同的分布，求 $a$，$b$ 的值($a\neq0$)，并求出 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

**练习 2.5** 成年男子的血液收缩压服从均值为 127.7，标准差为 19.2 的正态分布，求

a) 68%的成年男子血液收缩压的取值范围；

b) 95%的成年男子血液收缩压的取值范围；

c) 99.7%的成年男子血液收缩压的取值范围.

**练习 2.6** 设某种电池的使用寿命服从均值为 400 小时，标准差为 50 小时的正态分布，现有两节此种电池，当一节用完时用另一节，求

a) 两节电池的总寿命超过 760 小时的概率；

b) 第二节电池的寿命比第一节电池长至少 25 小时的概率；

c) 寿命较长的一节电池比另一节电池的寿命至少长 25 小时的概率.

**练习 2.7** 加洗一张照片的时间服从均值为 18 秒，标准差为 1 秒的正态分布，估计在下列时间下加洗 100 张照片的概率：

a) 长于 1 710 秒；

30

b) 在 1 690 秒和 1 710 秒之间.

**练习 2.8** 沿某条航线经常来往的乘客每年飞行的距离是一均值为 25 000 英里，标准差为 12 000 英里的随机变量，如果随机选出 30 位这样的乘客，估计今年他们飞行的平均距离满足以下条件的概率：

a)超过 25 000 英里；

b)在 23 000 英里和 27 000 英里之间.

**练习 2.9** 关于股价变动的一个模型假定：若现在某股票的股价为 $s$，则过一单位时间，它会以概率 $p$ 变为 $us$ 或以概率 $1-p$ 变为 $ds$，设每个时间段的价格变化是独立的，估计 1 000 单位时间后股价至少上升 30% 的概率，其中 $u=1.012$，$d=0.990$，$p=0.52$.

**练习 2.10** 在每个时间段内，某股票的股价会以 0.39 的概率下降 1，以 0.20 的概率保持不变，以 0.41 的概率上升 1，设股价在每个时间段的变化是独立的，估计 700 个时间段后，股价比开始时增长 10 以上的概率. 31





# 第3章　几何布朗运动

## 3.1　几何布朗运动

假设我们所感兴趣的是证券价格随时间演化的过程. 设现在时刻是0，用$S(y)$表示未来时刻$y$时该证券的价格. 我们称价格族$S(y)$，$0\leqslant y<\infty$服从漂移参数为$\mu$，波动参数为$\sigma$的几何布朗运动，如果对任何非负的实数$y$，$t$，随机变量$\dfrac{S(t+y)}{S(y)}$独立于$y$时刻及此前的所有价格，且$\log\left(\dfrac{S(t+y)}{S(y)}\right)$是均值为$\mu t$，方差为$t\sigma^2$的正态随机变量.

换句话说，如果未来一段时间$t$以后的价格与现在价格的比独立于此前的历史价格，并且该比率服从参数为$\mu t$和$t\sigma^2$的对数正态分布，那么证券的价格序列就是一个几何布朗运动.

由定义可知，若假设证券价格遵循几何布朗运动，那么一旦$\mu$，$\sigma$的值确定了，影响未来价格概率分布的只是现在的价格，而与历史价格无关. 更进一步，涉及未来时刻$t$以后的价格与当前价格比值的所有概率都与当前价格无关.（比如说，在此模型下，一种证券的价格在一个月后增长一倍的概率与该证券现在的价格是10还是25没有关系.）

这说明，若已知证券的初始价格为$S(0)$，时刻$t$价格的期望值仅依赖于几何布朗运动的漂移参数和波动参数. 更具体地说，如果初始价格为$s_0$，那么

32

$$E[S(t)]=s_0\mathrm{e}^{t(\mu+\sigma^2/2)}.$$

因而在几何布朗运动下，期望价格增长率为$\mu+\sigma^2/2$.

## 3.2　作为更简单模型极限的几何布朗运动

用$\Delta$表示一个小的时间增量，并假定，在每个$\Delta$时间单位内，证券的价格或者以概率$p$增长$u$倍，或者以概率$(1-p)$下跌$d$倍，其中：

$$u=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}},\quad d=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}},$$

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

即，假定证券价格只在$\Delta$的整数倍时刻发生变化，且变化只有两种可能：上涨$u$倍，或者下跌$d$倍.

当$\Delta$取得越来越小时，价格的变化就越来越频繁（虽然上升或下跌的倍数越来越趋近于1），相应的价格族就近似为一个几何布朗运动. 因此，几何布朗运动可以用一个在固定时间上升或下降固定倍数的相对简单的过程来近似.

下面证明当$\Delta$越来越小时，上述简单过程趋近于几何布朗运动. 首先，如果

$i\Delta$ 时的价格上涨，则令 $Y_i=1$，否则令 $Y_i=0$. 显然证券价格在前 $n$ 次变化过程中上涨的次数为 $\sum_{i=1}^{n}Y_i$，下跌的次数为 $n-\sum_{i=1}^{n}Y_i$，故在时刻 $n\Delta$ 的证券价格 $S(n\Delta)$ 可以表示为：

$$S(n\Delta)=S(0)u^{\sum_{i=1}^{n}Y_i}d^{n-\sum_{i=1}^{n}Y_i}$$

或

$$S(n\Delta)=d^nS(0)\left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{n}Y_i}.$$

33 如果我们记 $n=t/\Delta$，则上述方程可以改写为：

$$\frac{S(t)}{S(0)}=d^{t/\Delta}\left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{t/\Delta}Y_i}.$$

方程两边取对数得

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)&=\frac{t}{\Delta}\log(d)+\log\left(\frac{u}{d}\right)\sum_{i=1}^{t/\Delta}Y_i\\&=\frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}}+2\sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta}Y_i,\end{aligned}\tag{3-1}$$

其中等式(3-1)用到了 $u$ 和 $d$ 的定义. 现在，随着 $\Delta$ 趋于 0，和式 $\sum_{i=1}^{t/\Delta}Y_i$ 包含越来越多的项，由中心极限定理知，此和越来越趋近于正态随机变量，由等式(3-1)，这意味着 $\log(S(t)/S(0))$ 是一个正态随机变量. 而且由等式(3-1)得到：

$$\begin{aligned}E\left[\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right]&=\frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}}+2\sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta}E[Y_i]\\&=\frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}}+2\sigma\sqrt{\Delta}\,\frac{t}{\Delta}p\\&=\frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}}+\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)\\&=\mu t.\end{aligned}$$

此外等式(3-1)也给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right)&=4\sigma^2\Delta\sum_{i=1}^{t/\Delta}\mathrm{Var}(Y_i)\quad(\text{由独立性})\\&=4\sigma^2tp(1-p)\\&\approx\sigma^2t\quad(\text{因为对小 }\Delta, p\approx 1/2).\end{aligned}$$

因而，当 $\Delta$ 变得越来越小时，$\log(S(t)/S(0))$(同样的道理知 $\log(S(t+y)/S(y))$) 就变成均值为 $\mu t$，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 又因为前后价格的变化是独立的

且每一次改变时都以同样概率增减，故 $S(t+y)/S(y)$ 独立于时刻 $y$ 以前的价格变化. 所以当 $\Delta$ 趋于 0 时，几何布朗运动的两个条件均满足，这证明该模型确实变成了一个几何布朗运动. [34]

## 3.3 布朗运动

几何布朗运动可以看成是长期以来所研究的布朗运动模型的一个变体. 布朗运动的定义如下：

**定义** 价格集合 $S(y)$：$0\leqslant y<\infty$ 称为是漂移参数为 $\mu$，方差参数为 $\sigma^2$ 的布朗运动，如果对任意非负的实数 $y$，$t$，随机变量 $S(t+y)-S(y)$ 独立于时刻 $y$ 及此前的所有价格，且它是一个均值为 $\mu t$，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量.

因此布朗运动和几何布朗运动都具有下述性质：未来价格变化只依赖于当前价格，与历史价格无关. 但二者不同的是，布朗运动下，价格之差(而不是它们比率的对数)服从正态分布.

布朗运动有着著名的科学背景，它是以英国植物学家罗伯特·布朗(Robert Brown)的名字命名的. 布朗在 1827 年首次描述了散布在液体或气体中微粒的不规则运动. 关于这种运动的解释在 1905 年由阿尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein)首次给出. 他指出布朗运动在数学上可以通过假定散布的微粒连续不断地受到周围大分子的碰撞来解释. 而布朗运动简练的数学定义以及对它的某些数学性质的说明则是由美国应用数学家诺伯特·维纳(Norbert Wiener)在 1918 年发表的一系列文章中给出的.

有趣的是，1900 年，法国数学家 Bachelier 也独立地介绍了布朗运动. 他在自己的博士论文中用此来建立股票和商品价格运动的模型. 但是，在用布朗运动建立的股票或商品价格模型中存在两个主要缺陷. 第一，既然股票价格是一个正态随机变量，则它在理论上可以取负值. 第二，在布朗运动的模型里，假定无论初始价格为何值，固定时间长度的价格差具有相同的正态分布. 这个假设不是很合理. 例如，许多人可能不会认为股价一个月后从现价 20 美元降到 15 美元(下降了 25%)的概率，与股价一个月后从现价 10 美元降到 5 美元(下降了 50%)的概率相同. [35]

几何布朗运动模型却能克服上述缺陷. 既然股价的对数是正态随机变量，这就要求股价非负. 并且，由于它要求的是一定时间段内的价格比率具有相同的分布，这个要求假定在相等的时间段内，价格变化相同百分比的概率不依赖于当前的价格高低，这种假设更具合理性. 但是，值得注意的是，在这两种模型里，一旦模型参数 $\mu$，$\sigma$ 确定后，预测未来价格唯一需要的信息只是当前价格，与历史价格提供的信息没有关系.

## 3.4 习题

**练习 3.1** 设 $\{S(y)：y\geqslant 0\}$ 是漂移参数为 $\mu=0.01$，波动参数 $\sigma=0.2$ 的几何

布朗运动. 如果 $S(0)=100$，求：

a) $E[S(10)]$；

b) $P\{S(10)>100\}$；

c) $P\{S(10)<110\}$.

**练习 3.2** 将练习 3.1 中的波动参数值改为 0.4，其他条件和要求不变，求上述三式的值.

**练习 3.3** 将练习 3.1 中的波动参数值改为 0.6，其他条件和要求不变，求

36

上述三式的值.

**练习 3.4** 如果 $X$ 是具有均值为 $m$，方差为 $v^2$ 的正态随机变量，则

$$E[e^X]=e^{m+v^2/2}.$$

利用这一结论来验证 3.1 节中关于 $E[S(t)]$ 的公式.

**练习 3.5** 利用上一个练习的结论来计算当 $S(0)=s_0$ 时，$\mathrm{Var}(S(t))$ 的值.

**提示**：利用以下恒等式：

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2.$$

## 参考文献

[1] Bachelier, Louis (1900). "Theorie de la Speculation." *Annales de l'École Normale Supérieure* 17: 21−86; English translation by A. J. Boness in P. H. Cootner (Ed.) (1964), *The Random Character of Stock Market Prices*, pp. 17−78. Cambridge, MA: MIT Press.

[2] Ross, S. M. (2000). *Introduction To Probability Models*, 7th ed. Orlando, FL: Academic Press.

37



# 第4章　利率和现值分析

## 4.1　利率

如果你借了总额为 $P$ 的一笔款项（称之为本金），该款项在时间 $T$ 后偿还，并在届时支付以单利方式按每 $T$ 个时间单位 $r$ 的利率计算的利息，那么在 $T$ 时刻需要偿还的总金额是

$$P + rP = P(1 + r).$$

这就是说，你必须同时偿还本金 $P$ 和利息，利息等于本金乘以利率. 例如，如果你以 5%的年利率按单利（即 $r=0.05$）借款 100 美元，并在一年后偿还，则在这一年年末你需要偿还 105 美元.

**例 4.1a**　假设借款金额为 $P$，以年利率 $r$ 半年计息一次的复利方式支付利息，并且要在一年后偿还本金. 这意味着什么？一年后你欠了多少钱？

**解：** 为了解这个例子必须知道，以半年计息一次的复利形式支付利息意味着半年后会以每半年 $r/2$ 的利率以单利形式向你索要一次利息，这个利息随后被加入到你原有的本金中. 在下一个半年后，这个新的本金又以每半年 $r/2$ 的利率再索要一次利息. 换句话说，六个月后你的欠款为：

$$P(1 + r/2).$$

它被视为以利率 $r/2$ 的六个月期贷款的新的本金；因此，在这一年的年末，你的债务将为：

$$P(1 + r/2)(1 + r/2) = P(1 + r/2)^2.$$

□

**例 4.1b**　如果你借款 1 000 美元，并以年利率 8%按每季度计息一次的复利形式支付利息，借期为一年. 那么一年后你欠了多少钱？



**解：** 每季度计息一次的 8%的年复合利率，等价于每个季度以 2%的单利利率支付一次利息，而每个季度索要的利息，不仅要考虑原有的本金，而且还要加上累计到该时刻的利息. 因此，一个季度后你的欠款为：

$$1\,000(1 + 0.02);$$

两个季度后你的欠款为：

$$1\,000(1 + 0.02)(1 + 0.02) = 1\,000(1 + 0.02)^2;$$

三个季度后你的欠款为：

$$1\,000(1 + 0.02)^2(1 + 0.02) = 1\,000(1 + 0.02)^3;$$

四个季度后你的欠款为：

$$1\,000(1+0.02)^3(1+0.02)=1\,000(1+0.02)^4=1\,082.40.$$ □

**例 4.1c** 许多信用卡公司均是按每月计息一次的 18%的年复合利率索要利息的. 如果在一年的年初支付金额为 $P$，而在这一年中并没有发生支付，那么在这一年的年末欠款将是多少?

**解：** 这样的复合利率相当于每个月以月利率 18/12%=1.5%支付利息，而累计的利息将加到下一个月所欠的本金中. 因此，一年后你的欠款为：

$$P(1+0.015)^{12}=1.195\,6P.$$ □

正如我们在例 4.1b 和例 4.1c 中所看到的，如果利率 $r$ 是复合利率，那么实际支付的利息总额要比我们以单利利率 $r$ 支付的多. 这是因为在复利利息的计算中，对前面已经计算过的利息又收取了利息. 在此情形下，我们称 $r$ 为名义利率 (nominal interest rate)，并通过下式定义有效利率(effective interest rate)，记作 $r_{\text{eff}}$：

39

$$r_{\text{eff}}=\frac{\text{在一年末偿还的本息和}-P}{P}.$$

例如，如果名义利率为 $r$ 的一年期贷款每季度计息一次，则这一年的有效利率为：

$$r_{\text{eff}}=(1+r/4)^4-1.$$

因此，例 4.1b 中的有效利率为 8.24%，而例 4.1c 中的有效利率为 19.56%. 因为

$$P(1+r_{\text{eff}})=\text{在一年末偿还的本息和}$$

因此对一年期贷款，以复利计算的本息额与每年以单利利率 $r_{\text{eff}}$ 计算的本息额是相等的.

**例 4.1d**(加倍法则) 如果我们将资金投入到一个以每年计息一次，复合利率为 $r$ 的账户中，那么多少年之后我们的资金将变成原来的两倍?

**解：** 由于初始存款 $D$ 在 $n$ 年后的价值为 $D(1+r)^n$，因此我们需要找到 $n$ 的值以使得下式成立：

$$(1+r)^n=2.$$

而

$$(1+r)^n=\left(1+\frac{nr}{n}\right)^n \approx e^{nr},$$

只要 $n$ 不是很小，这里的近似就是相当精确的.

因此

$$e^{nr}\approx 2,$$

这意味着

$$n \approx \frac{\log(2)}{r} = \frac{0.693}{r}.$$

于是 $n$ 年后你的资金将会翻番，只要

$$n \approx \frac{0.7}{r}.$$

例如，如果利率为 1%($r=0.01$)，那么大约 70 年后你的资金将会翻番；如果 $r=0.02$，那么需要 35 年；如果 $r=0.03$，将需要 $23\frac{1}{3}$年；如果 $r=0.05$，将需要大约 14 年；如果 $r=0.07$，将需要大约 10 年；而如果 $r=0.10$，将需要大约 7 年. [40]

为检验上面的近似计算，我们给出以下数据(精确到小数点后三位)：

$$(1.01)^{70} = 2.007,$$
$$(1.02)^{35} = 2.000,$$
$$(1.03)^{23.33} = 1.993,$$
$$(1.05)^{14} = 1.980,$$
$$(1.07)^{10} = 1.967,$$
$$(1.10)^{7} = 1.949.$$

□

现在假设借款的本金为 $P$，借期一年，并以年名义利率 $r$ 连续地计算利息. 那么在一年末的欠款将为多少？为了回答这个问题，必须首先对“连续地”计息给出明确的定义. 我们注意到，如果贷款在一年中是以 $n$ 个相等的时间间隔按复利方式计算利息，则在这一年的年末，本息和将为：$P(1+r/n)^n$. 因此当 $n$ 变得越来越大时，取这个变化过程的极限作为连续复利是合理的. 在时刻 1 的本息和应该为：

$$P\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^n = Pe^r.$$

**例 4.1e** 如果一家银行所提供的利息是以名义利率 5%连续地计算利息，那么每年的有效利率应该是多少？

**解**：有效利率应为：

$$r_{\text{eff}} = \frac{Pe^{0.05}-P}{P} = e^{0.05}-1 \approx 0.05127.$$

即有效利率是每年 5.127%. □

如果借款金额为 $P$，借期 $t$ 年，并以年名义利率 $r$ 连续地支付利息，那么在时刻 $t$ 的本息和为 $Pe^{rt}$. 这是因为，如果在一年中计息 $n$ 次，那么到时刻 $t$ 将一 [41]

共计息 $nt$ 次，届时的债务水平为 $P(1+r/n)^{nt}$. 因此，在连续计息的情况下，在 $t$ 时刻的债务应该为：

$$P\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=P\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right)^{t}$$
$$=Pe^{rt}.$$

从前面的解释可以看出，按每单位时间 $r$ 计算的连续复利，可以解释成以每 $t$ 个时间单位名义利率 $rt$ 计算的连续复利.

## 4.2 现值分析

假设可以按每期计息一次的方式，以每期 $r$ 的名义利率借款和贷款. 在此条件下，第 $i$ 期的期末支付 $v$ 美元的当前价值是多少呢？由于金额为 $v(1+r)^{-i}$ 的银行贷款在第 $i$ 期需要偿还金额 $v$，因此在第 $i$ 期支付 $v$ 金额的现值是 $v(1+r)^{-i}$.

现值的概念使得我们可以比较不同的收入流，以决定哪一个更可取.

**例 4.2a** 假设在今后五年的每年年末，你将收到一笔钱(以千美元为单位). 以下三个支付序列哪一个更可取？

A. 12，14，16，18，20；

B. 16，16，15，15，15；

C. 20，16，14，12，10.

**解：** 如果名义利率为 $r$，每年计息一次，则支付序列 $x_i(i=1，2，3，4，5)$ 的现值为：

$$\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i;$$

具有最大现值的支付序列是最可取的. 从中可以看出，支付序列的优劣是依赖于利率的.

42

如果 $r$ 很小，那么序列 A 是最好的，因为它的支付总额最大. 对稍大一些的 $r$，序列 B 可能是最好的. 这是因为，虽然它的支付总额(77)比序列 A 的支付总额(80)小，但是 B 序列前期的几次支付额都大于 A 同期的支付额. 对于一个更大一些的 $r$，序列 C 就可能是最好的了. 它的前几期支付额比 A 和 B 同期的都大. 表 4-1 给出了在三个不同的 $r$ 值下，这三个支付流所对应的现值.

**表 4-1 现值**

| $r$ | 支付序列 | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 0.1 | 59.21 | 58.60 | 56.33 |
| 0.2 | 45.70 | 46.39 | 45.69 |
| 0.3 | 36.49 | 37.89 | 38.12 |

需要指出的是，可以在任何特定的时刻比较现金流的价值．例如，要比较它们在第五年末的价值，我们需要决定在下式中，哪一个支付序列可以得到最大的价值：

$$\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{5-i}x_i=(1+r)^5\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i.$$

因此若按利率进行排序，我们就得到与前面分析相同的结果．□

**注** 给定利率 $r$，每年计息一次．任意给定一个现金流 $a=a_1$，$a_2$，…，$a_n$，把它想象成在第 $i$ 年（$i=1$，…，$n$）年末支付给你 $a_i$ 美元的回报．这样的现金流可按下述方法予以复制：0 时刻在银行存入

$$\mathrm{PV}(a)=\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n}$$

并分别在每年末相继提款 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$．为了验证这种说法，注意到如果在第一年的年末提款 $a_1$，那么账户中还剩下

43

$$(1+r)\left[\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n}\right]-a_1$$
$$=\frac{a_2}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-1}}$$

在第二年年末提款 $a_2$ 后，账户中还有

$$(1+r)\left[\frac{a_2}{1+r}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-1}}\right]-a_2$$
$$=\frac{a_3}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-2}}.$$

继续这种操作，那么在第 $i(i<n)$ 年的年末提款 $a_i$ 后，账户中的剩余金额为

$$\frac{a_{i+1}}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-i}}$$

因此，当你将 $a_{n-1}$ 也提出后，账户中的金额为 $a_n/(1+r)$，这正好可以使你在下一年的年末提款 $a_n$．

类似地，现金流序列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 可以通过以下方式转换成初始资本 PV(a)：从银行借出此数量的资金，然后利用上述现金流来偿还该债务．因此，任何现金流序列都等价于现金流序列的现值．这就说明两个现金流中具有较大现值的现金流是更可取的．□

**例 4.2b** 一家公司在未来的五年中需要一种特定型号的机器．这家公司当前有一台这种机器，价值 6 000 美元，未来三年内每年折旧 2 000 美元，在第三年年末报废．该机器开始使用后第一年运转费用在该年年初值为 9 000 美元，之

后在此基础上每年增加 2 000 美元. 在每年的年初可以按固定价格 22 000 美元购买一台新机器. 一台新机器的寿命是六年，在最初使用的两年中每年折旧 3 000 美元，这之后每年折旧 4 000 美元. 新机器在第一年的运转成本是 6 000 美元，在随后的每年中将增加 1 000 美元. 如果利率为 10%，公司应在何时购买新机器？

44

**解**：这家公司可以在第 1、2、3、4 年的年初购买新机器，其对应的六年现金流如下(以 1 000 美元为单位)：

- 在第一年的年初购买新机器：22，7，8，9，10，−4；
- 在第二年的年初购买新机器：9，24，7，8，9，−8；
- 在第三年的年初购买新机器：9，11，26，7，8，−12；
- 在第四年的年初购买新机器：9，11，13，28，7，−16.

为了验证上面所列现金流的正确性，假设公司将在第三年的年初购买新机器，则公司在第一年的成本为旧机器 9 000 美元的运转成本；在第二年的成本为旧机器 11 000 美元的运转成本；在第三年的成本为新机器 22 000 的购买成本，加上 6 000 美元的运转成本，再减去从替换机器中得到的 2 000 美元；在第四年的成本是 7 000 美元的运转成本；在第五年的成本是 8 000 美元的运转成本；在第六年的成本是−12 000 美元，它是已经使用了三年的机器价值的负值. 其他的三个现金流序列可以通过相似的方法推得.

对于年利率 $r=0.10$，第一个现金流序列的现值为

$$22+\frac{7}{1.1}+\frac{8}{(1.1)^2}+\frac{9}{(1.1)^3}+\frac{10}{(1.1)^4}-\frac{4}{(1.1)^5}=46.083.$$

其他现金流的现值可用同样的方法计算出. 这四个现金流的现值分别是

$$46.083,\ 43.794,\ 43.760,\ 45.627.$$

因此，公司应在两年后购买新机器. □

**例 4.2c** 一个打算在 20 年后退休的人，决定在今后 240 个月的每月月初在银行存款 $A$，使得他可以在随后的 360 个月的每月月初提款 1 000 美元. 假设每月计息一次的名义年利率为 6%，那么 $A$ 的值应该为多少？

45

**解**：$r=0.06/12=0.005$ 是月利率. 令 $\beta=\frac{1}{1+r}$，他所有存款的现值为

$$A+A\beta+A\beta^2+\cdots+A\beta^{239}=A\,\frac{1-\beta^{240}}{1-\beta}.$$

类似地，如果 $W$ 是在随后的 360 个月中每月的提款额，那么所有的提款额的现值为

$$W\beta^{240}+W\beta^{241}+\cdots+W\beta^{599}=W\beta^{240}\frac{1-\beta^{360}}{1-\beta}.$$

这样，如果满足以下等式，他就可以实现所有的提款(同时他的账户中也不再有

任何钱)：

$$A\frac{1-\beta^{240}}{1-\beta}=W\beta^{240}\frac{1-\beta^{360}}{1-\beta}.$$

对于 $W=1\ 000$，$\beta=1/1.005$，可以得到

$$A=360.99.$$

这就是说，在 240 个月中每月存款 361 美元，就可以使得他在随后的 360 个月中每月提取 1 000 美元.

**注** 在这个例子中，我们使用了以下的代数恒等式：

$$1+b+b^2+\cdots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

为了证明这个等式，我们令

$$x=1+b+b^2+\cdots+b^n$$

注意到

$$\begin{aligned}x-1&=b+b^2+\cdots+b^n\\&=b(1+b+\cdots+b^{n-1})\\&=b(x-b^n).\end{aligned}$$

因此，

$$(1-b)x=1-b^{n+1},$$

这就证明了该等式.

46

利用相同的方法，或者令 $n$ 趋向于无穷，可以证明当 $|b|<1$ 时有

$$1+b+b^2+\cdots=\frac{1}{1-b}.$$

□

**例 4.2d** 终身年金给其持有者在未来每一年年末领取数额 $c$ 款项的权利. 这就是说，对于每一个 $i=1, 2, \cdots$，在第 $i$ 年的年末要向持有者支付 $c$. 如果利率为 $r$，每年计息一次，那么这个现金流序列的现值是多少？

**解**：该现金流可以被复制为初始时刻在银行存入本金 $c/r$，并在每一年的年末提取所得的利息(保留本金不动)，但是在初始阶段存入任何少于 $c/r$ 的金额都无法复制这个现金流，因此这个无限期现金流的现值为 $c/r$. 这个结论可以由下式推得：

$$\begin{aligned}\text{PV}&=\frac{c}{1+r}+\frac{c}{(1+r)^2}+\frac{c}{(1+r)^3}+\cdots\\&=\frac{c}{1+r}\left[1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\right]\\&=\frac{c}{1+r}\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+r}}\end{aligned}$$

$$= \frac{c}{r}.$$ □

**例 4.2e** 假设你向银行借款 100 000 美元买房，负责贷款的经理告诉你可以以 0.6%的月利率贷款 15 年，每月分期偿还. 如果银行要收取贷款初始费用 600 美元，房屋检验费 400 美元，以及贷款额的一个百分点，那么银行提供的贷款的实际年利率是多少？

**解**：首先我们考虑这个贷款的每月抵押支付，记之为 $A$. 由于 100 000 美元的贷款需要在未来的 180 个月中以月利率 0.6%偿还，所以

[47]

$$A[\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{180}] = 100\ 000,$$

其中 $\alpha=1/1.006$. 因此，

$$A = \frac{100\ 000(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha^{180})} = 910.05.$$

因此如果你实际得到了 100 000 美元，在 180 个月中每月偿还 910.05 美元，那么实际月利率应该是 0.6%. 但是考虑到银行收取的初始贷款费用、房屋检验费以及一个百分点的贷款额(这意味着收到贷款时，银行将收取名义贷款额 100 000 美元的 1%)，你实际只得到了 98 000 美元. 因此有效月利率是满足下式的 $r$ 的值：

$$A[\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{180}] = 98\ 000,$$

其中 $\beta=(1+r)^{-1}$. 因此，

$$\frac{\beta(1-\beta^{180})}{1-\beta} = 107.69$$

或者，由$\frac{1-\beta}{\beta}=r$得

$$\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{180}}{r} = 107.69.$$

利用试验误差法求上面方程的数值解(由于 $r>0.006$，很容易计算)得出：

$$r = 0.006\ 27.$$

因为$(1+0.006\ 27)^{12}=1.077\ 9$，所以 0.6%的名义月利率对应的有效年利率约为 7.8%. □

**例 4.2f** 假设一个人抵押贷款的金额为 $L$，需要在今后 $n$ 个月的每月月末偿还等额 $A$. 贷款的月利率是 $r$，每月计息一次.

a)已知 $L$，$n$，$r$，那么 $A$ 的值是多少？

[48]

b)在第 $j$ 月的月末支付已经完成后，还剩下多少贷款的本金？

c)在第 $j$ 月的支付中，多少是利息的支付，多少是本金的扣除？(这很重要，

因为有些合同允许贷款提前偿还，偿还的利息部分是可减免税的.）

**解**：$n$ 个月支付的现值为：

$$\frac{A}{1+r}+\frac{A}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}=\frac{A}{1+r}\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{A}{r}[1-(1+r)^{-n}].$$

因为这必须等于贷款额 $L$，我们可以看出，

$$A=\frac{Lr}{1-(1+r)^{-n}}=\frac{L(\alpha-1)\alpha^n}{\alpha^n-1},\tag{4-1}$$

其中，

$$\alpha=1+r.$$

例如，贷款 100 000 美元，需要以每月计息一次的名义年利率 0.09 在 360 个月中偿还，那么 $r=0.09/12=0.0075$，每月支付(以美元计)为

$$A=\frac{100\,000(0.007\,5)(1.007\,5)^{360}}{(1.007\,5)^{360}-1}=804.62.$$

令 $R_j$ 表示在第 $j(j=0，\cdots，n)$月月末支付完当月偿还额后还欠的本金总额. 为了确定这几个量，应该注意到，如果在第 $j$ 月的月末欠款为 $R_j$，那么在第 $j+1$ 月月末未发生支付前的欠款应该是$(1+r)R_j$. 由于每个月末的支付额为 $A$，所以有

$$R_{j+1}=(1+r)R_j-A=\alpha R_j-A.$$

从 $R_0=L$ 开始，我们得到：

$$\begin{aligned}R_1&=\alpha L-A;\\R_2&=\alpha R_1-A\\&=\alpha(\alpha L-A)-A\\&=\alpha^2L-(1+\alpha)A;\\R_3&=\alpha R_2-A\\&=\alpha(\alpha^2L-(1+\alpha)A)-A\\&=\alpha^3L-(1+\alpha+\alpha^2)A.\end{aligned}$$

49

一般地，对于 $j=0，\cdots，n$，有

$$\begin{aligned}R_j&=\alpha^jL-A(1+\alpha+\cdots+\alpha^{j-1})\\&=\alpha^jL-A\frac{\alpha^j-1}{\alpha-1}\\&=\alpha^jL-\frac{L\alpha^n(\alpha^j-1)}{\alpha^n-1}\quad\text{(由等式(4-1))}\end{aligned}$$

$$= \frac{L(\alpha^n - \alpha^j)}{\alpha^n - 1}.$$

令 $I_j$ 和 $P_j$ 分别表示在第 $j$ 月月末支付的利息和本金的扣除额. 由于 $R_{j-1}$ 是到上一个月月末的欠款额，因此有

$$\begin{aligned} I_j &= rR_{j-1} \\ &= \frac{L(\alpha - 1)(\alpha^n - \alpha^{j-1})}{\alpha^n - 1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} P_j &= A - I_j \\ &= \frac{L(\alpha - 1)}{\alpha^n - 1}[\alpha^n - (\alpha^n - \alpha^{j-1})] \\ &= \frac{L(\alpha - 1)\alpha^{j-1}}{\alpha^n - 1}. \end{aligned}$$

可以用下面的式子验证上面的结果：

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = L.$$

我们发现，相邻月间返还的本金额以倍数 $\alpha = 1 + r$ 增长. 例如，在一个期限为 30 年、利率是每月计息一次的 9%的年名义利率、本金为 100 000 美元的贷款中，第一个月支付的 804.62 美元中只有 54.62 美元是贷款本金的扣除额；而其余的都是利息. 在接下来的每一个月，用于偿还本金的支付额以倍数 1.007 5 增长. □

50

考虑以下两个现金流序列：

$$b_1, b_2, \cdots, b_n \quad 和 \quad c_1, c_2, \cdots, c_n.$$

在什么条件下对任何正利率 $r$ 第一个序列的现值不小于第二个序列的现值？显然，$b_i \geqslant c_i (i=1, \cdots, n)$ 是一个充分条件. 然而，还可以得到一个稍弱些的充分条件. 令

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} b_j \quad 和 \quad C_i = \sum_{j=1}^{i} c_j, \quad i = 1, \cdots, n;$$

则可以看到，以下的条件就已经足够了：

$$B_i \geqslant C_i, \quad 对每一个\ i = 1, \cdots, n$$

下面的命题给出了一个更弱些的充分条件.

**命题 4.2.1** 如果 $B_n \geqslant C_n$，并且对每一个 $k=1, \cdots, n$，

$$\sum_{i=1}^{k} B_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} C_i$$

则对每一个 $r > 0$，有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(1+r)^{-i}$$

换句话说，如果满足下面两个条件：

i) $b$ 现金流的金额之和至少不小于 $c$ 现金流的金额之和；

ii) 对每一个 $k=1, \cdots, n$，有

$$kb_1+(k-1)b_2+\cdots+b_k \geqslant kc_1+(k-1)c_2+\cdots+c_k.$$

那么命题 4.2.1 告诉我们：对于每一个正的利率 $r$，现金流序列 $b_1, \cdots, b_n$ 的现值不小于现金流序列 $c_1, \cdots, c_n$ 的现值.

## 4.3 回报率

考虑一项投资，初始支出为 $a$ $(a>0)$，一期后得到本息和为 $b$. 这个投资的回报率定义为使得最终回报的现值等于其初始支付的那个利率 $r$. 即回报率是满足下式的 $r$：

$$\frac{b}{1+r}=a \quad 或 \quad r=\frac{b}{a}-1.$$

例如，100 美元的投资，在一年后收回 150 美元，则称这个投资具有年回报率 0.50.

更一般地，考虑一个初始支出为 $a$ $(a>0)$ 的投资，可以得到一连串非负的收益 $b_1, \cdots, b_n$. 其中 $b_i$ 是在第 $i$ $(i=1, \cdots, n)$ 期的期末得到的收益，并且 $b_n>0$. 我们定义该投资每期的回报率为下述利率的值：它使得在该利率下现金流序列的复利现值等于零. 如果我们定义函数 $P$ 为：

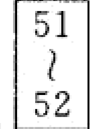
$$P(r)=-a+\sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i}, \tag{4-2}$$

那么这个投资每期的回报率为满足下式的 $r^*$ $(r^*>-1)$：

$$P(r^*)=0.$$

由于假设了 $a>0$，$b_i \geqslant 0$，$b_n>0$，所以当 $r>-1$ 时，$P(r)$ 是关于 $r$ 的严格递减的函数. 这意味着(由于 $\lim_{r\to -1} P(r)=\infty$ 和 $\lim_{r\to\infty} P(r)=-a<0$) 存在唯一的 $r^*$ 满足前面的方程. 而且，由于

$$P(0)=\sum_{i=1}^{n} b_i - a,$$




所以(见图 4-1)，如果有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i > a$$

则 $r^*$ 是正值；而若

$$\sum_{i=1}^{n} b_i < a.$$

则 $r^*$ 是负值.

这就是说，如果得到的全部本息和超过了初始的投资额，就得到正的回报率；反之则得到负的回报率. 此外，由 $P(r)$的单调性，如果利率小于 $r^*$，则现金流序列具有正的现值；而如果利率大于 $r^*$，则现金流的现值为负值.

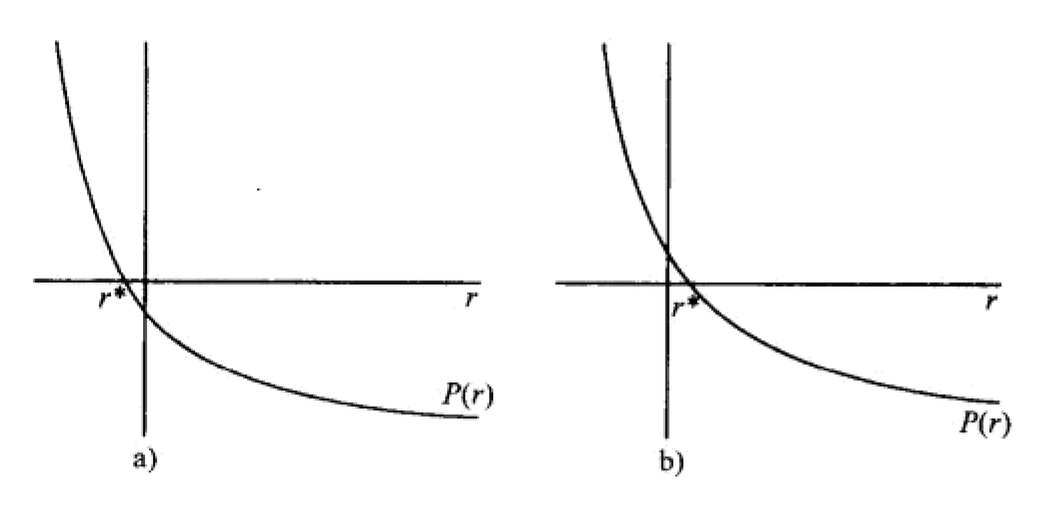



图4-1 $P(r)=-a+\sum_{i\geq 1} b_i(1+r)^{-i}$：a) $\sum_i b_i < a$；b) $\sum_i b_i > a$

当投资的每期回报率为 $r^*$ 时，我们经常称这个投资产生每期 $100r^*$ %的回报率.

**例 4.3a** 求下面投资的回报率：初始投资为 100，在头两期每期期末都可得到 60 的收益.

53

**解**：回报率是下面方程的解：

$$100=\frac{60}{1+r}+\frac{60}{(1+r)^2}.$$

令 $x=1/(1+r)$，则上式可写为

$$60x^2+60x-100=0,$$

由此解出

$$x=\frac{-60\pm\sqrt{60^2+4(60)(100)}}{120}.$$

由 $-1<r$ 可以推出 $x>0$，从而得到解

$$x=\frac{\sqrt{27\ 600}-60}{120}\approx 0.884\ 4.$$

因此，回报率 $r^*$ 满足

$$1+r^*\approx\frac{1}{0.884\ 4}\approx 1.131.$$

这就是说，该项投资得到了大约每期 13.1%的回报率. □

支付超过两期的投资回报率通常要用数值方法求解．但由于 $P(r)$ 的单调性，试算法在这里是一个很有效的方法．

注　1）如果我们假设现金流序列 $b_1$，…，$b_n$ 代表贷出 $a$ 的贷款人在随后每期的支付额，那么贷款人的每期回报率 $r^*$ 就是借款人每期支付的实际利率．

2）$r^*$ 有时也被称为内部回报率．

现在考虑一个更一般的投资现金流序列 $c_0$，$c_1$，…，$c_n$．如果 $c_i \geqslant 0$，那么 $c_i$ 表示在第 $i$ 期的期末投资者得到的收益；而如果 $c_i<0$，那么 $-c_i$ 表示在第 $i$ 期的期末投资者需要支付的数额．如果我们令

54

$$P(r) = \sum_{i=0}^{n} c_i (1+r)^{-i}$$

表示每期利率为 $r$ 时这个现金流的现值，那么一般来说在 $r>-1$ 的范围内，下式是不一定有唯一解的：

$$P(r) = 0$$

因此，对于比现在所考虑的更为一般的现金流来说，回报率这个概念是不确定的．此外，即使在上面的方程有唯一解 $r^*$ 的情况下，还可能产生 $P(r)$ 并不是 $r$ 的单调函数这个问题，因而并不能断定当利率在 $r^*$ 的一侧时这个投资就可以取得正值的回报，而在另一侧时得到负值的回报．

我们能够证明，存在唯一解的一个一般情况是：现金流序列开始于一个负值（相对应地，正值），最后变为正值（负值），并且从该变化点一直保持非负值（非正值）．换句话说，序列 $c_0$，$c_1$，…，$c_n$ 具有单一的符号变化．利用笛卡儿符号法则，并且已知至少有一个解存在，就可以得知在 $r>-1$ 的范围内，方程 $P(r)=0$ 有唯一解．

## 4.4　连续变化利率

假设利息按连续复利方式计算，但利率随时间变化．设现在时刻是 0，$r(s)$ 表示在 $s$ 时刻的利率．这样，如果在 $s$ 时刻将 $x$ 存入银行，则

$$s+h \text{ 时刻账户上的总额} \approx x(1+r(s)h) \quad (h \text{ 很小})$$

$r(s)$ 称为在 $s$ 时刻的即期或瞬时利率．

令 $D(t)$ 表示在 0 时刻存入 1 到 $t$ 时刻账户上的金额．为了用利率 $r(s)$，$0\leqslant s\leqslant t$ 来决定 $D(t)$，注意到（对于很小的 $h$）我们有

$$D(s+h) \approx D(s)(1+r(s)h)$$

55

或

$$D(s+h) - D(s) \approx D(s)r(s)h$$

或

$$\frac{D(s+h)-D(s)}{h}\approx D(s)r(s).$$

当 $h$ 变得越来越小时，上述近似计算变得越来越精确. 因此，对 $h\to 0$ 取极限，可以得到

$$D'(s)=D(s)r(s)$$

或

$$\frac{D'(s)}{D(s)}=r(s),$$

这意味着

$$\int_0^t \frac{D'(s)}{D(s)}ds=\int_0^t r(s)ds$$

或

$$\log(D(t))-\log(D(0))=\int_0^t r(s)ds.$$

因为 $D(0)=1$，由前面的等式我们可以得到

$$D(t)=\exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}.$$

现在令 $P(t)$ 表示 $t$ 时刻单位资金的当前(例如，时刻 0)价值($P(t)$ 可看作在时刻 $t$ 能得到 1 单位收益的债券的价格；如果利率永远等于 $r$，则它等于 $e^{-rt}$). 因为在时刻 0 存入 $1/D(t)$ 可在 $t$ 时刻得到 1，因此有

$$P(t)=\frac{1}{D(t)}=\exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}. \tag{4-3}$$

令 $\bar{r}(t)$ 表示直到时刻 $t$ 的即期利率的平均值，即

$$\bar{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds.$$

56 函数 $\bar{r}(t)$，$t\geqslant 0$，称为收益曲线.

**例 4.4a** 已知

$$r(s)=\frac{1}{1+s}r_1+\frac{s}{1+s}r_2.$$

求出收益曲线和现值函数.

**解：** 改写 $r(s)$ 为

$$r(s)=r_2+\frac{r_1-r_2}{1+s},\quad s\geqslant 0,$$

则可以给出以下的收益曲线

$$\bar{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\left(r_2+\frac{r_1-r_2}{1+s}\right)ds$$

$$= r_2 + \frac{r_1 - r_2}{t}\log(1+t).$$

因此，现值函数为

$$\begin{aligned} P(t) &= \exp\{-t\bar{r}(t)\} \\ &= \exp\{-r_2 t\}\exp\{-\log((1+t)^{r_1-r_2})\} \\ &= \exp\{-r_2 t\}(1+t)^{r_2-r_1}. \end{aligned}$$

□

## 4.5 习题

**练习 4.1** 若 10%的名义利率分别为

a)半年计息一次的复利；

b)每季度计息一次的复利；

c)连续复利.

其对应的有效利率分别是多少？

**练习 4.2** 假设将钱存入银行中，银行支付的名义利率为 10%. 如果利率是连续复合利率，那么多长时间后存入的钱才能是原来的两倍？

**练习 4.3** 如果利率为 5%，每年计息一次，那么大约要多少年时间才能使你的钱变为原来的四倍？如果利率变为 4%，又要多少年？

57

**练习 4.4** 如果利率为年复合利率 $r$，请给出一个公式，用它来估计要多少年时间才能使你的钱变为原来的三倍.

**练习 4.5** 假设年名义利率固定在 6%，每月计息一次. 在未来的 60 个月中，每月需要投资多少钱，才能在 60 个月后得到 100 000 美元？

**练习 4.6** 一个投资的年现金流为

$$-1\,000,\ -1\,200,\ 800,\ 900,\ 800.$$

年利率为 6%. 对于一个既可以借款也可以存款的人，这是否是一个值得的投资？

**练习 4.7** 考虑两个可能的年末收益序列：

20，20，20，15，10，5 和 10，10，15，20，20，20.

如果每年计息一次的年复合利率分别为 a)3%，b)5%，c)10%，哪个现金流序列更可取？

**练习 4.8** 一个五年期、面值为 10 000 美元、具有 10%息票率的债券，价值 10 000 美元. 在今后五年中，每六个月支付给持有者 500 美元，并且将在这十次支付末再支付本金 10 000 美元. 如果每月计息一次的利率为：a)6%，b)10%，c)12%，求出其现值.

**练习 4.9** 一个朋友购买了一套新的价值 4 200 美元的音响系统. 他同意预付定金 1 000 美元，并在一个月后开始每月支付 160 美元，共支付 24 个月. 那么所支付的有效利率为多少？

**练习 4.10** 假设年利率为 20%，重新考虑例 4.2b.

[58] **练习 4.11** 假设新机器每年的成本增加 1 000 美元，重新考虑例 4.2b.

**练习 4.12** 假设你向银行贷款 120 000 美元，银行收取两个百分点的费用. 报价利率为每月 0.5%. 你仅需要在随后的 36 个月中，每月支付累积利息，并在最后支付本金 120 000 美元. 那么这个贷款的有效利率是多少?

**练习 4.13** 你可以以下面两种方式偿还贷款：一种是现在一次还清所有的欠款 16 000 美元；另一种是现在还 10 000 美元，并在十年后再还 10 000 美元. 对于下面的名义连续复合利率，哪一种还款方式更可取?

a)2%，b)5%，c)10%.

**练习 4.14** 一种五年期的美国国库券(以平价 1 000 美元卖出)具有 6%的息票率，这意味着，在支付 1 000 美元购买了这个国库券后，购买者将在今后的九个半年期的每期期末得到 30 美元，并将在第十个半年期末得到 1 030 美元. 换句话说，这个债券支付每半年 3%的单利，并将在五年末支付本金. 假设连续复合利率为 5%，那么这个现金流的现值是多少?

**练习 4.15** 请解释为什么 $(1+0.05/n)^n$ 是 $n$ 的增函数，对于 $n=1, 2, 3, \cdots$.

**练习 4.16** 一个银行支付 6%的名义连续复合利率. 如果最初存入 100 美元，经过 a)30 天，b)60 天，c)120 天，分别可以得到多少利息?

**练习 4.17** 假设连续复合利率为 $r$. 你打算今天借款 1 000 美元，一年后借款 2 000 美元，两年后再借款 3 000 美元，并将在三年后还清全部借款. 那么三年后你将支付多少钱?

**练习 4.18** 假设每年计息一次的名义利率为 5%. 为了得到现金流 3，5，−6，[59] 5，其中第 $i$ 个值将在从现在算起的 $i$ 年后得到，$i=1, 2, 3, 4$(支付值 −6 意味着你将要在 3 年后支付 6)，那么现在要支付多少钱?

**练习 4.19** 令 $r$ 为每年计息一次的名义利率. $r$ 如何取值才能使现金流 20，10 优于现金流 0，34?

**练习 4.20** 如果名义连续复合利率为 6%，要多长时间才能使 1 000 的存款增长到 1 500?

**练习 4.21** 假设连续复合利率为 $r$，对于一个在每个时刻 $s$，$s+t$，$s+2t$，…，均会得到 $A$ 的现金流序列，其现值为多少?

**练习 4.22** 假设连续复合利率为 $r$，在 0 时刻存入 $D$，用 $D(t)$表示在 $t$ 时刻账户中的本息和.

a)证明对于一个很小的 $h$，$D(t+h)\approx D(t)+rhD(t)$；

b)利用 a)证明：$D'(t)=rD(t)$；

c)利用 b)证明：$D(t)=De^{rt}$.

**练习 4.23** 考虑下面两个现金流，其中每一个现金流都是在 $i$ 年后得到第 $i$

次支付：

100，140，131 和 90，160，120.

如果不知道利率，能够说出哪个现金流更可取吗？

**练习 4.24** 对于一个 20 的初始投资，一期过后，你将以 0.3 的概率得到 10 的收益，以 0.7 的概率得到 40 的收益. 那么这个投资的期望回报率是多少？

**练习 4.25** 一个具有面值 $F$ 的零息票债券在债券到期日时支付给持有者本息和 $F$. 假设连续复合利率为 8%，请求出一个面值 $F=1\ 000$ 的十年期零息票债券的现值.

60

**练习 4.26** 请求出下面这个两年期投资的回报率. 初始支付为 1 000，在第一年末得到收益 500，在第二年末分别得到收益：a)300；b)500；c)700.

**练习 4.27** 颠倒获得收益的顺序，重新计算上一题.

**练习 4.28** 通货膨胀率定义为价格总体的增长比率. 例如，如果年通货膨胀率为 4%，那么去年价值 100 美元的物品，今年要花费 104 美元. 令 $r_i$ 表示通货膨胀率，并考虑一个回报率为 $r$ 的投资. 我们通常关心从投资使得购买力增加了多少这个角度来决定投资的回报率. 我们称这个量为投资的*扣除物价因素的回报率*，记作 $r_a$. 由于一年后 $(1+r)x$ 的购买力等于现在 $(1+r)x/(1+r_i)$ 的购买力，因此关于常量购买力单位，这个投资在一期内将数量 $x$ 转化为 $(1+r)x/(1+r_i)$. 因而，其经通货膨胀调整的回报率为

$$r_a = \frac{1+r}{1+r_i} - 1.$$

当 $r$ 和 $r_i$ 都很小时，可以得到以下的近似公式：

$$r_a \approx r - r_i.$$

例如，通货膨胀率为 3%，银行提供 5% 的单利，其扣除物价因素的回报率大约为 2%. 那么它的确切值是多少？

**练习 4.29** 考虑一个投资现金流序列 $c_0$，$c_1$，…，$c_n$，其中 $c_i<0$，$i<n$，且 $c_n>0$. 请验证：如果

$$P(r) = \sum_{i=0}^{n} c_i(1+r)^{-i},$$

61

那么在 $r>-1$ 的范围内，

a) $P(r)=0$ 存在唯一解；

b) $P(r)$ 不一定是 $r$ 的单调函数.

**练习 4.30** 假设你向银行借款的年利率为 8%，而存款的年利率为 5%. 如果你一开始的资金为零，一项投资的年现金流为

$-1\ 000$，900，800，$-1\ 200$，700，

你是否应该投资？

**练习 4.31** 请验证，如果 $r(t)$ 是 $t$ 的非减函数，那么 $\bar{r}(t)$ 也是 $t$ 的非减

函数.

**练习 4.32** 请验证，收益曲线 $\bar{r}(t)$是 $t$ 的非减函数，当且仅当

$$P(\alpha t) \geqslant (P(t))^{\alpha} \quad 或者 \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad t \geqslant 0.$$

**练习 4.33** 如果 $P(t)=e^{-a-bt}(t\geqslant 0)$，求出：a)$r(t)$；b)$\bar{r}(t)$.

**练习 4.34** 验证

$$a) r(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \quad 和 \quad b) \bar{r}(t) = -\frac{\log P(t)}{t}.$$

**练习 4.35** 画出在下列情形时，例 4.4a 中的即期利率函数 $r(t)$的曲线：

a)$r_1 < r_2$；

62

b)$r_2 < r_1$.



# 第 5 章　合约的套利定价

## 5.1　期权定价的一个例子

假设名义利率为 $r$，考虑下面的期权定价模型，该期权是未来以指定价格购买一种股票．设该股票现价(以美元计价)为每股 100，并且已知在一个时间段后它的价格为 200 或 50(见图 5-1)．进一步假设，对任意 $y$，可以以 $Cy$ 的成本在时刻 0 购买 $y$ 股期权，使得在时刻 1 可以以每股 150 的价格买入 $y$ 股股票．假若你购买了这样的期权且股价涨到 200，那么可以在时刻 1 执行期权，并从已购买的 $y$ 股期权中的每一股实现 $200-150=50$ 的利润．另一方面，如果时刻 1 时股票价格是 50，那么期权将一文不值．除了期权外，也可在时刻 0 以 $100x$ 的成本买进 $x$ 股股票．每一股股票在时刻 1 的价值将是 200 或 50.

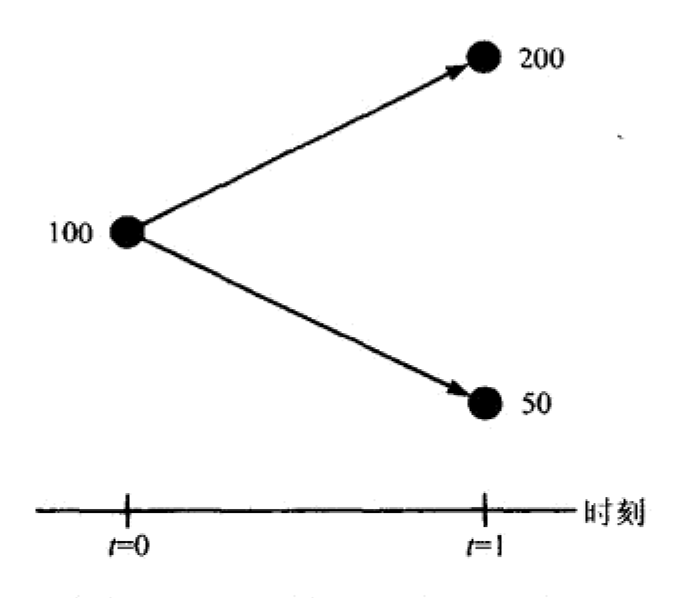



图 5-1　股票在时刻 1 的可能价格

我们假定 $x$ 和 $y$ 的值均可为正、负或零．也就是说，可以买进或卖出股票和期权．例如，若 $x$ 为负，那么你卖出了 $x$ 股股票并为你带来了 $-100x$ 的初始回报，因而有责任在时刻 1 以每股 200 或 50 的成本买入并归还这 $-x$ 股股票．(当卖出一种你不拥有的股票时，就说你是卖空它.)

我们感兴趣的是决定单位期权价格 $C$ 合适的值．特别地，我们将证明：若 $r$ 是单位时期的利率，只要不是 $C=[100-50(1+r)^{-1}]/3$，就存在一个购买组合，它在任何情况下都能带来正的利润现值．为说明这一点，假设在时刻 0 我们

买入 $x$ 单位股票

且

买入 $y$ 单位期权

这里 $x$ 和 $y$(二者均可正可负)的值待定．这个交易的成本为 $100x+Cy$．如果此成本为正，那么该款项应该是从银行借得，并在时刻 1 连同利息一起归还；而若

其为负，则所收到的款项$-(100x+Cy)$应存入银行并在时刻1取回. 我们所持资产在时刻1的价值取决于股票在当时的价格，它可由以下公式给出：

$$\text{价值}=\begin{cases}200x+50y & \text{如果价格为 }200,\\ 50x & \text{如果价格为 }50.\end{cases}$$

该公式可以验证如下：如果股票在时刻1的价格为200，那么$x$股股票的价值为$200x$，以每股150的价格购买股票的$y$单位期权的价值为$(200-150)y$. 另一方面，如果股票价格为50，那么$x$股股票的价值为$50x$，而$y$单位这样的期权将毫无价值. 现在，我们要选择一个合适的$y$值，以使得在时刻1，无论股票价格为多少，都可以使我们所持资产的价值相同. 这就是说，我们要选择满足下面条件的$y$：

$$200x+50y=50x$$

或

$$y=-3x.$$

[63~64]

注意$y$和$x$的符号相反，因此当$x>0$时，在0时刻买入$x$股股票，同时将卖出$3x$单位的股票期权. 类似地，如果$x$为负值，那么0时刻将卖空$-x$股股票，并同时买入$-3x$单位的股票期权.

这样，只要满足$y=-3x$，那么无论股票价格为多少，都有

$$\text{在时刻 1 所持资产的价值}=50x$$

因此，如果$y=-3x$，那么在还清所有贷款(如果$100x+Cy>0$)或从银行取出存款(如果$100x+Cy<0$)后，可以获利

$$\begin{aligned}\text{获利}&=50x-(100x+Cy)(1+r)\\&=50x-(100x-3xC)(1+r)\\&=(1+r)x[3C-100+50(1+r)^{-1}].\end{aligned}$$

于是，如果$3C=100-50(1+r)^{-1}$，那么赢利为0. 而另一方面，如果$3C\neq100-50(1+r)^{-1}$，那么我们可以保证得到正的赢利(无论股票在时刻1的价格如何)，只要当$3C>100-50(1+r)^{-1}$时取$x$为正值，而当$3C<100-50(1+r)^{-1}$时取$x$为负值.

举个例子，如果$(1+r)^{-1}=0.9$，每个期权的价格为$C=20$，那么购买一股股票和卖出三个单位的期权要花费我们$100-3(20)=40$，这些钱要从银行借. 然而，无论股票的价格涨到200还是跌到50，这些资产在时刻1的价值都将是50. 用这些钱中的$40(1+r)=44.44$来归还银行贷款，则可以确保赢利5.56. 类似地，如果一个期权的价格为15，那么卖出一股股票($x=-1$)并买入三个单位的期权，则可以得到初始赢利$100-45=55$，将这些钱存入银行则可以在时刻1得到$55(1+r)=61.11$. 因为我们的资产在时刻1的价值为$-50$，因此可以确保赢利11.11. 一个确保赢利的赌博方案称为套利. 对于所考虑的这些数值，唯一

不会产生套利的期权成本 $C$ 应该为 $C=(100-45)/3=55/3$.

套利的存在性可以使用下面的一价律来判别.

65

**命题 5.1.1**(一价律) *考虑两个投资，第一个投资的成本是固定数额 $C_1$，第二个投资的成本为固定数额 $C_2$. 如果第一个投资的回报(现值)总是和第二个投资的回报相等，则要么 $C_1=C_2$，要么存在套利.*

一价律的证明是很直接的，因为如果它们的成本不相同，那么通过买入成本少的投资而卖出成本高的投资就得到一个套利.

为了在前面的例子中应用一价律，注意购买买入期权的投资在时刻 1 的回报为

$$\text{期权的回报} = \begin{cases} 50 & \text{如果价格为 } 200, \\ 0 & \text{如果价格为 } 50. \end{cases}$$

现在考虑另一个投资，它要求通过向银行借款 $x$(在时刻 1 连本带息一次还清)并利用自己的资金 $100y-x$ 来购买 $y$ 股证券. 因此，这个投资的初始成本是 $100y-x$，在时刻 1 的回报为：

$$\text{投资的回报} = \begin{cases} 200y - x(1+r) & \text{如果价格为 } 200, \\ 50y - x(1+r) & \text{如果价格为 } 50. \end{cases}$$

这样，如果选择合适的 $x$ 和 $y$ 使得

$$200y - x(1+r) = 50,$$
$$50y - x(1+r) = 0,$$

那么从这个投资和期权得到的回报是一样的. 解上面的方程可以得到下面的解：

$$y = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{50}{3(1+r)}.$$

因为 $x$ 和 $y$ 取上面的值后，这个投资的成本为 $100y-x=\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$，由一价律可以得知，要么它等于期权的成本，要么存在套利.

容易验证，当期权的成本 $C$ 不等于 $\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$ 时套利的存在性(买入成本低的投资，卖出成本高的投资). 下面详述此过程.

66

**情形 1**：$C<\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$.

在这种情况下，卖出 1/3 股股票. 在得到的 100/3 中，用 $C$ 来购买期权，并将其余的$\left(\text{大于}\frac{50}{3(1+r)}\right)$存入银行.

如果在时刻 1 时股票的价格为 200，那么期权价值 50，并且银行中的存款多于 50/3. 因此有足够的钱来偿还 200/3 的债务(这是由于卖空 1/3 股股票). 如果股票在时刻 1 的价格为 50，那么银行中的存款多于 50/3，足够偿还 50/3 的

债务.

**情形 2**：$C>\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$.

在这种情况下，卖出期权，从银行借款$\frac{50}{3(1+r)}$，并用前两项收入中的 100/3 购买 1/3 股股票. $\left(\text{剩下的钱 } C-\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3 \text{ 就是套利所得.}\right)$如果股票在时刻 1 的价格为 200，那么使用卖出 1/3 股股票所得的 200/3 来偿还欠银行的 50/3，并支付 50 给期权的买方. 如果在时刻 1 股票的价格为 50，那么你卖出的期权将毫无价值，只要用从卖出 1/3 股股票中所得的 50/3 来偿还银行借款就可以了.

**注**　*应该注意的是，我们已经并将继续假定(除非特别说明)：总存在这样一个市场，在其中任何投资都是随时可以买卖的.*

## 5.2 通过套利定价的其他例子

5.1 节中所考虑的期权称为买入期权，因为它给投资者以特定价格(称为执行价或敲定价)购买股票的权利. 美式期权允许投资者在期权到期日及此前的任何时刻执行期权，而欧式期权只能在期权到期日执行. 虽然从表面上看，美式期权由于其更多的灵活性，可能会更值钱，但是实际上提前执行美式买入期权永远都不是一个最佳的选择. 因此这两种期权的价值是相同的. 下面我们就来证明这个结论.

67

**命题 5.2.1**　*美式买入期权不应该在其到期日 $t$ 之前执行.*

**证明**：假设股票现在的价格为 $S$，你有一个 $t$ 时刻到期的期权，它给其持有者以固定价格 $K$ 买入一股股票的权利. 如果你现在就执行这个期权，将得到 $S-K$. 然而，考虑在另一种选择下将会出现什么情况：如果你不执行期权，转而卖空股票，并在 $t$ 时刻以当时的市场价格和期权执行价 $K$ 中较小者买入股票. 在这个投资策略下，一开始你就可以得到 $S$，在 $t$ 时刻只需要支付股票当时的市场价格和期权执行价 $K$ 之中较小者. 显然这比得到 $S$ 并立即支付 $K$ 更可取. □

除了买入期权，还有股票卖出期权. 这种期权给予投资者以特定价格卖出股票的权利. 美式卖出期权允许投资者在期权到期日及此前的任何时刻卖出股票，即执行期权. 欧式卖出期权只能在期权到期日时执行. 和买入期权的情况相反，提前执行一个卖出期权可能是很有利的，因此美式卖出期权可能会比欧式卖出期权更值钱. 如果不存在套利，可以得到这两类期权之间的一个关系. 设有一个到期日为 $t$，执行价为 $K$ 的欧式卖出期权；此外还有另一个到期日是 $t$，执行价也为 $K$ 的欧式买入期权. 它们满足的关系就是下面的卖出-买入期权平价公式.

**命题 5.2.2**　*令 $C$ 是一个买入期权的价格，该期权使其持有者有权在 $t$ 时刻*

以执行价 $K$ 买入一股股票. 同时，令 $P$ 是一个欧式卖出期权的价格，此期权给其持有者在 $t$ 时刻以执行价 $K$ 卖出一股股票的权利. 设 $S$ 是股票在 0 时刻的价格，假设利息是以名义利率 $r$ 连续折现的. 那么，要么存在关系

$$S+P-C=Ke^{-rt}$$

要么存在套利机会.

**证明**：如果

$$S+P-C<Ke^{-rt}$$

68

那么我们通过在 0 时刻购买一股股票，同时买入一个卖出期权，并卖出一个买入期权，就可以确保赢利. 这个初始的投入 $S+P-C$ 是从银行借款，并将在 $t$ 时刻偿还. 现在考虑所持资产在 $t$ 时刻的价值. 根据股票在 $t$ 时刻的市场价值，$S(t)$存在两种情形. 如果 $S(t)\leqslant K$，那么卖出的买入期权毫无价值，我们可以执行卖出期权，以价格 $K$ 卖出股票. 另一方面，如果 $S(t)>K$，那么买入的卖出期权毫无价值，而买入期权将被执行，这迫使我们以价格 $K$ 卖出股票. 由于 $K>e^{rt}(S+P-C)$，在每一种情况下，我们都可以有足够的资金偿还银行借款，并实现正的利润.

当

$$S+P-C>Ke^{-rt},$$

时，我们可以通过与上面步骤反向的投资策略来确保正的利润. 即卖出一股股票，同时卖出一个卖出期权，并买入一个买入期权. 我们将证明的细节留给读者. □

套利原理还可以用来决定股票的当前价格和在将来特定时间购买股票的合同价格之间的关系. 下面是关于远期合约的两个例子.

**例 5.2a**(远期合约) 设 $S$ 是某股股票当前的市场价格. 在一个远期合约中，合约双方在 0 时刻分别同意在未来时刻 $t$ 以价格 $F$ 购买和交割一股股票. 这就是说，双方约定了在 $t$ 时刻付款交割的股票价格. 我们将对下述结论给出一个套利证明：如果利息是以名义利率 $r$ 连续折现的，那么为了使得不存在套利机会，必须有以下关系：

$$F=Se^{rt}.$$

为看出这个等式必须成立. 首先我们假设

$$F<Se^{rt}.$$

在这种情况下，通过在 0 时刻卖出股票就可以确保赢利. 当然需要在 $t$ 时刻将股票买回. 将卖出股票所得的 $S$ 投入一个 $t$ 时刻到期的债券，并购买一个约定在 $t$ 时刻交割一股股票的远期合约. 这样，在 $t$ 时刻你将从债券中得到 $Se^{rt}$ 的收入，从此款项中拿出 $F$ 来购买一股股票以偿还你的债务. 这样，最终你就可以得到正的利润 $Se^{rt}-F$. 另一方面，如果

69

$$F > Se^{rt}$$

那么，通过同时卖出一个远期合约和借款 $S$ 来购买一股股票，就可以保证得到利润 $F-Se^{rt}$. 事实上在此投资策略下，到了时刻 $t$，你可以从交割股票中得到 $F$，利用其中的一部分就可支付所欠的贷款本息 $Se^{rt}$.

**注** 在上面的例子中，我们也可通过一价律来解释 $F=Se^{rt}$. 考虑以下的两个投资，它们最终结果都是在 $t$ 时刻拥有证券.

1)将 $Fe^{-rt}$ 存入银行，并购买一个远期合约；

2)购买证券.

这样，由一价律，要么 $F=Se^{rt}$，要么存在套利.

在股票市场上购买一股股票时，就是购买发行股票的经济实体的一股所有权. 另一方面，商品市场涉及更为具体的物品，如农产品有燕麦、玉米和小麦；能源产品有原油和天然气；金属有金、银和白金；动物有猪肉、猪内脏和牛肉；等等. 商品市场中几乎所有的交易都会涉及未来买卖商品的合约. 例如，可以购买一个合约，以今天约定的价格在 90 天后购买天然气.（这种期货合约和远期合约是有区别的，虽然它们都会在交割时全额支付，但在期货合约中，每个交易日都要根据商品交易所期货合约价格变化情况清算一次.）也可以卖出一个期货合约，指定自己在特定的时间以特定的价格卖出天然气. 绝大多数活跃于商品市场的投资者都从未和商品有过真正的接触，事实上购买期货合约的投资者多数都会在交割日之前卖出合约. 然而，在例 5.2a 中给出的关系对商品市场的期货合约并不适用. 原因是当 $F>Se^{rt}$ 时，如果你购买了商品(例如，原油)，打算在 $t$ 时刻卖出，那么还要支付额外的费用来储藏及为这些原油进行保险. 另一方面，如果 $F<Se^{rt}$，要想以今天的价格卖出商品，必须要能够立即进行交割.

70

远期合约中最常见的一种是涉及货币交换的合约，这是我们在下一个例子中要谈到的.

**例 5.2b** 在 1998 年 9 月 4 日的《纽约时报》上给出了以下关于德国马克(DM)的报价：

- 当日：0.577 7；
- 90 天远期：0.580 8.

换句话说，当天可以用 0.577 7 美元购买 1 德国马克. 此外，也可以签署一个合约，在 90 天后以 0.580 8 美元的价格购买 1 德国马克. 为什么这两个价格不同呢？

**解**：人们可能会觉得价格的差别是由于在这 90 天中，德国马克相对美元价值的市场预期所引起的. 事实上这种价格差别完全是由于德国和美国不同的利率所致. 假设这两个国家的利息都是以下面的名义年利率连续计算复利的：美国的是 $r_u$，而德国的是 $r_g$. 令 $S$ 表示 1 德国马克的当前价格，$F$ 表示在 $t$ 时刻交割的

远期合约的交割价格.(这个例子考虑的是特殊的情况,即 $S=0.5777$, $F=0.5808$, $t=90/365$.)我们现在证明:为了不存在套利机会,必须满足

$$F = Se^{(r_u - r_g)t}.$$

要知道这是为什么,考虑在 $t$ 时刻得到 1 德国马克的下述两种途径:

1)将 $Fe^{-r_u t}$ 存入一家美国银行,购买一个远期合约使得可以在 $t$ 时刻购买 1 德国马克.

2)购买 $e^{-r_g t}$ 德国马克,并将它们存入一家德国银行.

注意,成本为 $Fe^{-r_u t}$ 的第一笔投资和成本为 $Se^{-r_g t}$ 的第二笔投资,在 $t$ 时刻都可以得到 1 德国马克.因此,由一价律,要么 $Fe^{-r_u t}=Se^{-r_g t}$,要么存在套利.

71

当 $Fe^{-r_u t}<Se^{-r_g t}$ 时,通过从一家德国银行借入 1 德国马克,以 $S$ 美元的价格卖出,并将所得存入一家美国银行,就可以得到套利机会.同时,购买一个约定在 $t$ 时刻购买 $e^{r_g t}$ 马克的远期合约.到时刻 $t$,你将拥有 $Se^{r_u t}$ 美元.用其中的 $Fe^{r_g t}$ 去履行远期合约承诺并购回 $e^{r_g t}$ 马克,将这些马克还给那家德国银行.由于 $Se^{r_u t}>Fe^{r_g t}$,可以从这些交易中确保正的收益.

当 $Fe^{-r_u t}>Se^{-r_g t}$ 时,通过从一家美国银行借入 $Se^{-r_g t}$ 美元,用它们来购买 $e^{-r_g t}$ 马克,并存入一家德国银行,这样也可以得到套利机会.类似地,卖出一个约定在 $t$ 时刻购买 1 马克的远期合约.到了 $t$ 时刻,从德国银行中取出 1 马克给远期合约的买方,你将由此得到 $F$.因为 $Se^{-r_g t}e^{r_u t}$(为偿还贷款必须要支付给美国银行的数额)小于 $F$,因此你获得一个套利. □

下面是一价律的一个推广.

**命题 5.2.3**(广义一价律) 考虑两个投资,第一个投资的成本为固定数额 $C_1$,第二个投资的成本为 $C_2$.如果 $C_1<C_2$,并且从第一个投资得到的回报(现值)总是不少于从第二个投资得到的回报(现值),那么存在套利.

显然同时购买投资 1 和卖出投资 2 就是一个套利.

在应用广义一价律前,我们需要以下的定义.

**定义** 函数 $f(x)$ 称为凸的,如果对所有的 $x$ 和 $y$,以及 $0<\lambda<1$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

我们从几何的角度来解释函数的凸性.注意,$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 是 $f(x)$ 和 $f(y)$ 之间连线上的一个点,它给 $f(x)$ 的权重与在 $x$ 和 $y$ 的连线上的点 $\lambda x+(1-\lambda)y$ 所给予点 $x$ 的权重是相同的.因此,凸性可以解释为,连接曲线 $f(x)$ 上任意两点的直线段总是在这段曲线之上方(或与曲线重合)(见图 5-2).

72

**命题 5.2.4** 令 $C(K, t)$ 是以某特定证券为标的的买入期权的价格,这个期权的敲定价为 $K$,到期日为 $t$.

a)对于固定的到期日 $t$,$C(K, t)$ 关于 $K$ 是凸的非增函数.

b)对于任意 $s>0$,有 $C(K, t)-C(K+s, t)\leqslant s$.

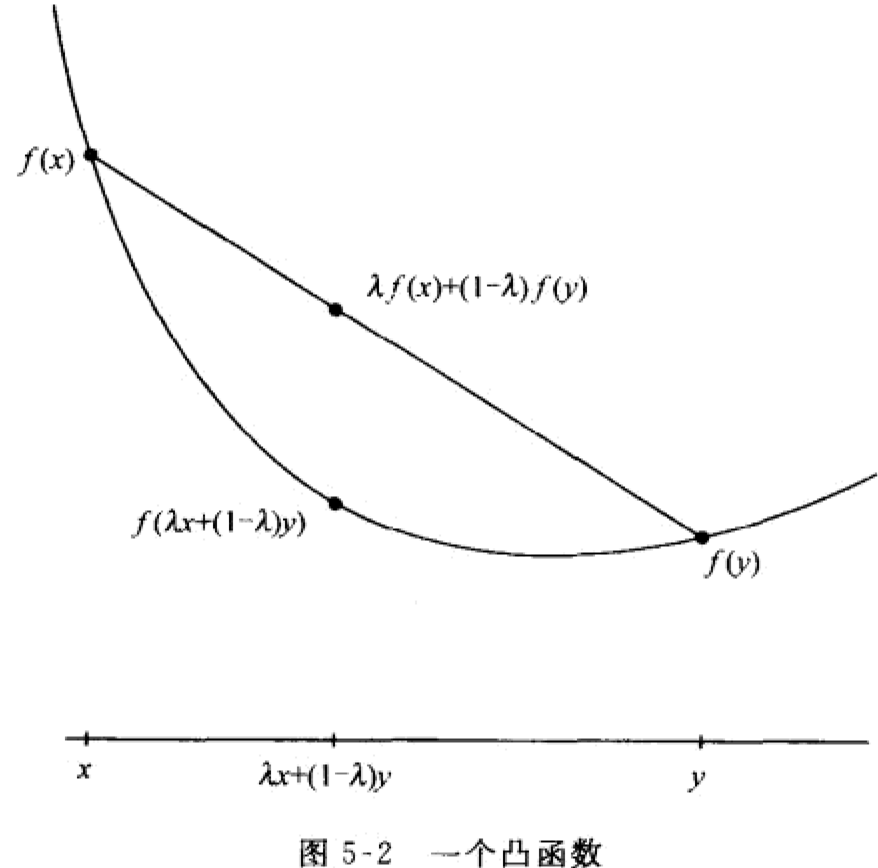



图 5-2 一个凸函数

**证明**：如果用 $S(t)$ 来表示标的证券在 $t$ 时刻的价格，那么在 $t$ 时刻买入期权的回报是：

$$\text{期权的回报} = \begin{cases} S(t) - K & \text{若 } S(t) \geqslant K, \\ 0 & \text{若 } S(t) < K. \end{cases}$$

73

这就是说，

$$\text{期权的回报} = (S(t) - K)^{+},$$

其中，$x^{+}$(称为 $x$ 的正部)定义为：当 $x \geqslant 0$ 时取值 $x$，当 $x < 0$ 时取值 0. 对于固定的 $S(t)$，从回报函数 $(S(t) - K)^{+}$ 的图像(见图 5-3)可以看出，它是关于 $K$ 的凸函数.




图 5-3 函数 $(S(t) - K)^{+}$

为了证明 $C(K, t)$ 是关于 $K$ 的凸函数，假设

$$K = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

现在考虑以下两个投资：

1)购买 1$(K, t)$买入期权.

2)购买 $\lambda(K_1, t)$买入期权和$(1-\lambda)(K_2, t)$买入期权.

因为投资 1)在 $t$ 时刻的回报为$(S(t)-K)^+$，而投资 2)在 $t$ 时刻的回报为$\lambda(S(t)-K_1)^+ + (1-\lambda)(S(t)-K_2)^+$，由函数$(S(t)-K)^+$的凸性可知，投资 2)的回报至少应该和投资 1)的回报一样大. 因此，由广义一价律，要么投资 2)的成本至少和投资 1)的成本相等，要么存在套利. 这就是说，要么

$$C(K,t) \leqslant \lambda C(K_1,t) + (1-\lambda)C(K_2,t)$$

要么存在套利. 这证明了函数 $C(K, t)$的凸性. 对于 $C(K, t)$关于 $K$ 的非增函数的证明，作为练习留给读者.

74

要证明 b)部分，应该注意到，如果 $C(K, t)-C(K+s, t)>s$，那么通过卖出一个 $t$ 时刻到期、敲定价为 $K$ 的买入期权，并买入一个 $t$ 时刻到期，敲定价为 $K+s$ 的买入期权，就可以得到套利机会. 因为敲定价为 $K$ 的期权的回报比敲定价为 $K+s$ 的期权的回报，最多多出 $s$，因此从这个投资组合总会得到正的利润.

□

**注** 命题 5.2.4 中的 b)部分等价于以下的不等式：

$$\frac{\partial}{\partial K}C(K,t) \geqslant -1. \tag{5-1}$$

为了说明它们的等价性，由 b)可以得到，

$$C(K+s,t) - C(K,t) \geqslant -s, \quad s > 0.$$

不等式两边同时除以 $s$，并令 $s$ 趋向于 0，就可以得到式(5-1)的结果.

为了说明式(5-1)隐含命题 5.2.4 的 b)部分，假设式(5-1)成立. 于是

$$\int_K^{K+s} \frac{\partial}{\partial x}C(x,t)dx \geqslant \int_K^{K+s}(-1)dx,$$

故有

$$C(K+s,t) - C(K,t) \geqslant -s,$$

这正是 b).

在下面的例子中，我们利用广义一价律证明，一个以指数(一组特定证券的价格的加权和)为标的的期权价格，永远不会高于以其中的每一个证券为标的的全部期权的价格. 这个结论有时称为期权投资组合性质.

**例 5.2c** 考虑 $n$ 种证券，对于 $j=1, \cdots, n$，令 $S_j(y)$表示证券 $j$ 在未来时刻 $y$ 的价格. 对于固定的正数 $w_j$，令

$$I(y) = \sum_{j=1} w_j S_j(y).$$

即 $I(y)$ 是这组证券组合在时刻 $y$ 的市场价值，其中这个投资组合中包含 $w_j$ 股证券 $j$. 当说一个关于证券 $j$ 的 $(K_j,\ t)$ 买入期权时，我们是指一个在 $t$ 时刻到期的敲定价为 $K_j$ 的买入期权. 用 $C_j(j=1,\ \cdots,\ n)$ 分别表示这些期权的价格. 并且，令 $C$ 表示以指数 $I$ 为标的买入期权的价格，这个期权的敲定价为 $\sum_{j=1}^{n} w_j K_j$，到期日为 $t$. 下面我们来证明，以指数为标的的期权的回报总是小于或者等于通过购买 $w_j(K_j,\ t)$ 个以证券 $j$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$ 为标的的买入期权所得到的回报之和.

$$
\begin{aligned}
\text{指数期权在 } t \text{ 时刻的回报} &= \Big(I(t) - \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\Big)^+ \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j S_j(t) - \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\Big)^+ \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)\Big)^+ \\
&\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} (w_j (S_j(t) - K_j))^+\Big)^+ \quad (\text{因为 } x \leqslant x^+) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)^+\Big)^+ \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)^+ \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot [(K_j, t) \text{ 买入期权的回报}].
\end{aligned}
$$

因此，由广义一价律得知，要么 $C \leqslant \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$，要么存在套利. □

## 5.3 习题

**练习 5.1** 假设已知某一时期后某一证券的价格是 $s_1,\ \cdots,\ s_r$ 这 $r$ 个值中的某一个. 当 $K < \min s_i$ 时，一个在时刻 1 以价格 $K$ 购买该证券的买入期权的价格为多少?

**练习 5.2** 令 $C$ 是一个买入期权的价格，其标的证券现在价格为 $S$，证明 $C \leqslant S$.

**练习 5.3** 令 $C$ 是一个买入期权的价格，这个期权可以在 $t$ 时刻以价格 $K$ 买入一个证券. $S$ 是这个证券现在的价格，$r$ 是利率. 请写出一个包含 $C$，$S$ 和 $Ke^{-rt}$ 的不等式，并给出证明.

**练习 5.4** 一个证券当前的价格是 28. 给定连续复合利率为 5%，请给出一个四个月期执行价为 30 的买入期权价格的下界.

**练习 5.5** 令 $P$ 是一个执行价为 $K$ 和现价为 $S$ 的证券的卖出期权的价格. 下面哪一个式子一定成立?

a) $P \leqslant S$.

b) $P \leqslant K$.

**练习 5.6** 令 $P$ 是一个执行价为 $K$ 和现价为 $S$ 的证券的卖出期权的价格. 试证明

$$P \geqslant K e^{-rt} - S,$$

其中 $t$ 是期权的到期日，$r$ 是利率.

**练习 5.7** 对于命题5.2.2，证明：如果 $S+P-C>Ke^{-rt}$，那么以下的投资策略总可以得到正的收益：卖出一股股票，卖出一个卖出期权，并买入一个买入期权.

**练习 5.8** 请使用一价律证明卖出-买入期权平价公式.

**练习 5.9** 一个欧式买入期权和一个欧式卖出期权具有相同的标的证券，同为三个月期，敲定价均为20，而且卖出价格都是3. 如果名义连续复合利率为10%，当前证券的价格为25，请写出一个套利策略.

77

**练习 5.10** 一个美式买入期权和一个美式卖出期权具有相同的标的证券，相同的到期日 $t$，相同的敲定价 $K$. 其价格分别为 $C_a$ 和 $P_a$. 如果标的证券当前的价格为 $S$，请给出一个包含 $C_a$，$P_a$，$K$ 和 $e^{-rt}$ 的等式或者不等式，并进行简要的解释.

**练习 5.11** 考虑两个具有相同标的证券、相同到期日 $t$ 的卖出期权. 假设这两个期权的执行价分别为 $K_1$ 和 $K_2$. 试证明

$$K_1 - K_2 \geqslant P_1 - P_2,$$

其中 $P_i$ 是执行价为 $K_i$ 的卖出期权的价格，$i=1, 2$.

**练习 5.12** 请解释，为什么一个 $t$ 时刻到期的美式卖出期权的价格不低于一个仅仅到期日要早一些的同样美式卖出期权的价格？

**练习 5.13** 说明下面的论断是否总是正确的，或者总是错误的，或者时对时错. 除了下面提到的以外，假设其余所有参数都是固定的. 请对你的答案作出简要的解释.

a) 一个欧式买入期权的价格关于其到期日是非减的.

b) 一个以外币为标的的远期合约的价格关于其到期日是非减的.

c) 一个欧式卖出期权的价格关于其到期日是非减的.

**练习 5.14** 你的财务顾问建议你同时购买一个欧式卖出期权和一个欧式买入期权，这两个期权具有相同的标的证券，在三个月后同时到期，并且敲定价都为标的证券当前的价格.

a) 这个投资策略在什么情况下是合理的？

b) 将 $t=1/4$ 时刻该投资策略的回报看作该时刻证券价格的函数，画出其图形.

78

**练习 5.15** 如果一只股票在即将支付红利 $d$（即以每股金额 $d$ 支付给股票的持有者）之前的价格为 $s$，那么支付完红利后股票的价格为多少？

**练习 5.16** 令 $S(t)$表示某一证券在 $t$ 时刻的价格．以下的期权均具有相同的到期日 $t$，而且除非特别说明，均具有相同的执行价 $K$．请给出拥有以下资产的投资者在 $t$ 时刻得到的回报：

a)拥有一个买入期权和一个卖出期权；

b)拥有一个执行价为 $K_1$ 的买入期权，并已经卖出了一个执行价为 $K_2$ 的卖出期权；

c)拥有两个买入期权，并已经卖空了一股标的证券；

d)拥有一股标的证券，并已经卖出了一个买入期权．

**练习 5.17** 证明一个欧式买入期权的价格关于其敲定价是非增的．

**练习 5.18** 假设购买了一个执行价为100的买入期权，同时卖出了一个以相同证券为标的证券、执行价为105的买入期权，并且这两个期权具有相同的到期日．

a)这个投资初始的成本是正还是负？

b)将投资回报作为证券价格的函数，画出在期权到期日该函数的图形．

**练习 5.19** 考虑两个具有相同标的证券的买入期权，该证券当前价格为110．假设这两个期权具有相同的到期日，其中一个期权的敲定价为100，价格为20，而另一个的敲定价为110，价格为 $C$．如果不存在套利机会，请给出 $C$ 的下界．

**练习 5.20** 用 $P(K, t)$表示一个 $t$ 时刻到期的、执行价为 $K$ 的欧式卖出期权的价格．试证明对于固定的 $t$，$P(K, t)$是 $K$ 的凸函数；或者解释这个论断为什么不一定成立．

**练习 5.21** 通过书中给出的关于一个买入期权价格的证明，是否可以经过修改得出，一个美式卖出期权的价格是其执行价的凸函数？

79

**练习 5.22** 一个$(K_1, t_1, K_2, t_2)$双重买入期权可以在 $t_1$ 时刻以执行价 $K_1$ 执行，也可以在 $t_2$ 时刻$(t_2>t_1)$以执行价 $K_2$ 执行．试证明，如果 $K_1>e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，不会在 $t_1$ 时刻执行该期权．

**练习 5.23** 在一个上限买入期权中，回报被限定在一个预先指定的值 $A$．这就是说，如果这个期权的敲定价为 $K$，到期日为 $t$，那么在 $t$ 时刻它的回报是

$$\min(A, (S(t)-K)^+),$$

其中 $S(t)$是标的证券在 $t$ 时刻的价格．试证明，这样一个期权可以通过以下等价的途径来定义：即当这个买入期权在 $t$ 时刻执行时，令

$$\max(K, S(t)-A)$$

为其敲定价．

**练习 5.24** 试证明，只有当标的证券的价格至少为 $K+A$ 时，一个美式上限买入期权才会被提前执行．

**练习 5.25** 一个函数 $f(x)$称为是凹的，如果对于所有的实数 $x$，$y$ 和

$0<\lambda<1$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

a)请给出凹函数的几何解释;

b)试证明，$f(x)$是凹的当且仅当 $g(x)=-f(x)$是凸的.

## 参考文献

[1] Cox,J., and M. Rubinstein (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[2] Merton,R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Mangagement Science* 4: 141-83.

[3] Samuelson, P., and R. Merton (1969). "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility." *Industrial Management Review* 10: 17-46.

[4] Stoll,H. R., and R. E. Whaley(1986). "New Option Intruments: Arbitrageable Linkages and Valuation." *Advances in Futures and Options Research* 1(part A): 25-62.








# 第6章 套利定理

## 6.1 套利定理

考虑一个试验，其所有可能结果构成的集合为$\{1, 2, \cdots, m\}$，现有$n$个不同的赌博与此试验相关．假设我们在第$i$个赌博中投入了$x$单位的赌金，若试验结果是$j(j=1, \cdots, m)$，可以得到收益$xr_i(j)$，其中$r_i(\cdot)$是在第$i$个赌博上投入一个单位赌金的*收益函数*．投入的赌金数量可以是正的、负的或者是零．

向量$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为赌博策略，其中$x_1$表示有$x_1$个单位的赌金投在赌博1上，$x_2$表示有$x_2$个单位的赌金投在赌博2上，…，$x_n$表示有$x_n$个单位的赌金投在赌博$n$上．如果试验的结果是$j$，那么由策略$\boldsymbol{x}$得到的收益可由下式表示：

$$\boldsymbol{x}\text{ 的收益} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j).$$

下面的结果称为*套利定理*，它表明，在试验的所有可能结果所构成的集合上，要么存在一个概率向量$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$，使得在这个概率下每一种赌博的期望收益均为零；要么存在一个赌博策略，在这个策略下对于试验的任何一种结果都会得到正的收益．

**定理 6.1.1**(套利定理)　*下面结论只有一个是正确的，即要么*

*a)存在一个概率向量$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$使得*

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad \text{对所有 } i = 1,\cdots,n,$$

*要么*

81

*b)存在一个赌博策略$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$使得*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > 0, \quad \text{对所有 } j = 1,\cdots,m.$$

**证明**：见6.3节．

如果试验的结果是$X$，那么套利定理表明：要么存在一个概率的集合$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$．使得当

$$P\{X = j\} = p_j, \quad \text{对所有 } j = 1,\cdots,m$$

时有

$$E[r_i(X)] = 0, \quad \text{对所有 } i = 1,\cdots,n,$$

否则就存在一个稳赢的赌博策略．换句话说，在试验的可能结果集上如果不存在一个概率向量，使得在这个概率下所有的赌博都是公平的，那么就一定存在一个

能够稳赢的赌博策略.

**定义**　定义在试验的可能结果集合上的一个概率测度，如果它使得所有的赌博都是公平的，那么这个概率测度称为风险中性测度.

**例 6.1a**　在某些情况下，所允许的赌博类型仅仅是选择一个结果 $i(i=1,\cdots,m)$，且打赌试验的结果就是 $i$，这样一个赌博的收益通常用赔率的形式表示. 如果关于结果 $i$ 的赔率是 $o_i$(通常表示为“$o_i$ 比 1”)，那么当试验的结果是 $i$ 时，一个单位的赌金会收益 $o_i$，而当结果不是 $i$ 时收益则会是 $-1$. 也就是说，押在 $i$ 上的一个单位的赌金或者赢得 $o_i$ 或者损失掉 1. 这个赌博的收益函数可由下式给出：

$$r_i(j)=\begin{cases}o_i & 若\ j=i,\\ -1 & 若\ j\neq i.\end{cases}$$

假设有赔率 $o_1,o_2,\cdots,o_m$，为了使得不存在一个稳赢的策略，那么就一定要存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，使得在这个概率下对每一个 $i$，都有

82

$$0=E_{\boldsymbol{p}}[r_i(X)]=o_ip_i-(1-p_i).$$

也就是说，我们必须有

$$p_i=\frac{1}{1+o_i}.$$

由于所有 $p_i$ 的和必须为 1，这就意味着不存在套利的条件是

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+o_i}=1.$$

换句话说就是，如果 $\sum\limits_{i=1}^{m}(1+o_i)^{-1}\neq 1$，那么存在稳赢策略是可能的．例如，假设共有三种可能的结果，且其投注赔率由下表给出：

| 结果 | 赔率 |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |

由上表可知，结果 1 的赔率是 1 比 1；结果 2 的赔率是 2 比 1；结果 3 的赔率是 3 比 1. 由于

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}\neq 1,$$

故稳赢是可能的. 一种可能的策略是：在结果 1 上押 $-1$ 个单位的赌金(那么当

结果不是 1 的时候能赢得 1，而当结果是 1 的时候则会输掉 1)，在结果 2 上押 −0.7 个单位的赌金(当结果不是 2 的时候能赢得 0.7，而当结果是 2 的时候则会输掉 1.4)，在结果 3 上押 −0.5 个单位的赌金(那么当结果不是 3 的时候能赢得 0.5，而当结果是 3 的时候则会输掉 1.5)．这样如果试验的结果是 1，你能赢得 $-1+0.7+0.5=0.2$；如果结果是 2，能赢得 $1-1.4+0.5=0.1$；结果是 3 时能赢 $1+0.7-1.5=0.2$．因此，无论何种情形都会有一个正的收益． □

**例 6.1b** 我们再次考虑 5.1 节中期权定价的例子．在那个例子里，股票的初始价格是 100 并且假设一段时间后股票的价格只可能是 200 或者 50．如果在 0 时刻我们能以每股 $C$ 的价格买入一个期权，这个期权使我们在时刻 1 能以每股 150 的价格购买股票，那么当 $C$ 的值为多少时稳赢的赌博不可能存在？

83

**解**：在本节的背景下，试验的结果是时刻 1 时的股票价格，因此，有两种可能的结果．与此同时也存在两种不同的赌博：买(或者卖)股票和买(或者卖)期权．由套利定理我们知道，如果在结果集上存在概率$(p, 1-p)$使得这两种赌博的期望收益现值都为零，那么就不会有稳赢的情况出现．

购买一股该股票收益的现值为：

$$\text{收益} = \begin{cases} 200(1+r)^{-1} - 100 & \text{如果在时刻 1 时的价格是 200,} \\ 50(1+r)^{-1} - 100 & \text{如果在时刻 1 时的价格是 50.} \end{cases}$$

因此，若在时刻 1 时股票价格是 200 的概率为 $p$，那么

$$E[\text{收益}] = p\left[\frac{200}{1+r} - 100\right] + (1-p)\left[\frac{50}{1+r} - 100\right]$$
$$= p\frac{150}{1+r} + \frac{50}{1+r} - 100.$$

令这个式子等于零，我们就得到：

$$p = \frac{1+2r}{3}.$$

由此可见，若赌博为购买股票，那么使得该赌博的期望收益是零的概率向量$(p, 1-p)$只可能是 $p=(1+2r)/3$．

此外，购买一个期权收益的现值为：

$$\text{收益} = \begin{cases} 50(1+r)^{-1} - C & \text{如果在时刻 1 时的价格是 200,} \\ -C & \text{如果在时刻 1 时的价格是 50.} \end{cases}$$

因此，当 $p=(1+2r)/3$ 时，购买一个期权的期望收益是：

$$E[\text{收益}] = \frac{1+2r}{3}\frac{50}{1+r} - C.$$

根据套利定理，我们就得到了不可能存在稳赢策略时 $C$ 的唯一值是：

$$C = \frac{1+2r}{3}\frac{50}{1+r};$$

即，

$$C = \frac{50 + 100r}{3(1 + r)},$$

84 我们得到的结果和5.1节的一致. □

## 6.2 多时期二项模型

现在我们考虑一个有 $n$ 个交易时间段的股票期权，仍设每一个时间段的名义利率均为 $r$. 令 $S(0)$ 表示初始时刻股票的价格，$S(i)$ 表示股票在此后第 $i$ 个时间段的价格，其中 $i=1, \cdots, n$. 我们假设 $S(i)$ 的取值只可能是 $uS(i-1)$ 或者 $dS(i-1)$，其中 $d<1+r<u$. 这就是说，从一个时间段变化到下一个时间段时，股票的价格要么上升为原来的 $u$ 倍，要么下降为原来的 $d$ 倍. 此外，还假设在0时刻我们可以购买一个期权，这个期权使得我们能在 $n$ 个时间段后可以以价格 $K$ 购买股票，且假设股票能在这 $n$ 个时间段的任何一个时间段买进或者卖出.

如果第 $i$ 个时间段的股票价格上升到第 $i-1$ 个时间段股票价格的 $u$ 倍，我们就令 $X_i$ 等于1，相反如果价格下降为原来的 $d$ 倍我们就令它等于0，也就是：

$$X_i = \begin{cases} 1 & 若\ S(i) = uS(i-1), \\ 0 & 若\ S(i) = dS(i-1). \end{cases}$$

现在我们可以把价值向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$看作是试验结果. 由套利定理知道，为了不存在套利机会，在这个结果集上必须存在一个使得所有的赌博都是公平的概率测度. 即一定存在一个概率的集合

$$P\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\}, \quad x_i = 0,1, \quad i = 1, \cdots, n,$$

使得所有的赌博都是公平的.

现在我们考虑下面这种类型的赌博：首先选定一个 $i(i=1, \cdots, n)$的值和一个向量$(x_1, \cdots, x_{i-1})$，该向量的每一个元素取值为0或1. 然后观察前 $i-1$ 个时间段股价的变化. 如果对每一个 $j=1, \cdots, i-1$ 都有 $X_j=x_j$，那么就立刻购买一个单位的股票然后在下一个时间段将其卖出. 假设我们已经购买了股票，则在时刻 $i-1$ 它的价值就是 $S(i-1)$；如果我们在时刻 $i$ 把它卖出，并且把所得的价值折现到时刻 $i-1$，那么当股票价格上涨时这个值就是$(1+r)^{-1}uS(i-1)$，下跌时是$(1+r)^{-1}dS(i-1)$. 因此，若令

$$\alpha = P\{X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}\}$$

表示股票被购买的概率，并且令

85

$$p = P\{X_i = 1 \mid X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}\}$$

它表示一只股票在下一个时间段价格上涨的概率，那么这种赌博的期望收益(在时刻$i-1$的值)为：

$$\alpha[p(1+r)^{-1}uS(i-1) + (1-p)(1+r)^{-1}dS(i-1) - S(i-1)].$$

于是，要使得这个赌博的期望收益是 0，就必须有：

$$\frac{pu}{1+r}+\frac{(1-p)d}{1+r}=1$$

或者，等价地：

$$p=\frac{1+r-d}{u-d}.$$

这意味着，能够使得这个赌博的期望收益是 0 的概率必须满足下面的条件：

$$P\{X_i=1 \mid X_1=x_1,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1}\}=\frac{1+r-d}{u-d}.$$

由于 $x_1$，…，$x_n$ 都是任意取的，可以由此推知：使得所有的赌博都公平的概率只可能是这样一个概率：它使得 $X_1$，…，$X_n$ 为相互独立的随机变量，并且有

$$P\{X_i=1\}=p=1-P\{X_i=0\},\quad i=1,\cdots,n, \tag{6-1}$$

其中

$$p=\frac{1+r-d}{u-d}. \tag{6-2}$$

可以证明在这样的概率下，任何购买股票的赌博都会有期望值为零的收益. 因此由套利定理，期权的价格必须等于在上述概率下的期望收益在当前(即在 0 时刻)的价值，否则就会有套利机会出现. 为了得到无套利价格，我们假设 $X_i$ 是取值为 0 或 1 的相互独立的随机变量，而且它们等于 1 的概率都是由等式(6-2)给出的 $p$. 令 $Y$ 表示所有 $X_i$ 的和，那么 $Y$ 的值就是 $X_i$ 等于 1 的个数，因此 $Y$ 是一个参数为 $n$ 和 $p$ 的二项分布随机变量. 现在，从一个时间段变化到下一个时间段，股票的价格等于原来的价格乘上 $u$ 或者 $d$. 在时刻 $n$，股票的价格已经上涨了 $Y$ 次并且下跌了 $n-Y$ 次，所以 $n$ 个时间段后股票的价格可以表示为：

86

$$S(n)=u^Y d^{n-Y} S(0),$$

其中 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$，这是一个参数为 $n$ 和 $p$ 的二项分布随机变量. 如果购买了期权，那么 $n$ 个时间段后这个期权的价值就是$(S_n-K)^+$，这个符号表示等于 $S_n-K$(当 $S_n-K$ 非负的时候)或 0(当 $S_n-K$ 是负数的时候). 因此，这个期权当前(0 时刻)的价值为：

$$(1+r)^{-n}(S(n)-K)^+$$

期权现值的期望值是：

$$(1+r)^{-n}E[(S(n)-K)^+]=(1+r)^{-n}E[(S(0)u^Y d^{n-Y}-K)^+].$$

由此可知，不会导致套利存在的期权价格 $C$ 的唯一值为：

$$C=(1+r)^{-n}E[(S(0)u^Y d^{n-Y}-K)^+]. \tag{6-3}$$

**注** 为了计算方便，可以把等式(6-3)进行简化. 但是我们的主要目的是要在期权标的证券服从几何布朗运动假设下，决定该期权唯一的无套利价格，而等式(6-3)的表达形式对于这个目标来说已经足够了. 在下一章中我们将由它推导出著名的 Black-Scholes 公式.

## 6.3 套利定理的证明

为了证明套利定理，我们首先考虑下面线性规划中的对偶定理. 假设对于给定的常数，$c_i$，$b_j$，$a_{i,j}$ $(i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, m)$，我们要选择合适的 $x_1$，$\cdots$，$x_n$ 值使得：

$$\text{最大化} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

87

$$\text{在} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m \text{ 条件下.}$$

这个问题称为线性规划原问题. 每一个线性规划原问题都有一个对偶问题，上面这个线性规划原问题的对偶问题就是选择 $y_1$，$\cdots$，$y_m$ 的适当的值，使得

$$\text{最小化} \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

$$\text{在} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_j = c_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, m \text{ 条件下.}$$

对于一个线性规划问题，如果存在适当的变量值(在线性规划原问题里是 $x_1$，$\cdots$，$x_n$，在对偶问题里是 $y_1$，$\cdots$，$y_m$)满足约束条件，那么这个线性规划就称为可行的. 下面引用的是线性规划中的一个重要结果，即对偶定理，我们将略去其证明.

**命题 6.3.1**(线性规划对偶定理) 如果一个线性规划原问题及其对偶问题都是可行的，那么它们都有最优解并且原问题的最大值等于其对偶问题的最小值. 如果这两个问题中的任何一个是不可行的，那么另外一个不存在最优解.

对偶定理的一个结论就是套利定理. 回忆一下，套利定理指的是这样的情形：存在一个试验，这个试验可能的结果是 1，2，$\cdots$，$m$，关于这个试验有 $n$ 种不同的赌博，而每种赌博的收益是由试验的结果来决定的. 特别地，如果你在第 $i$ 种赌博上押了 $x$ 个单位的赌金，那么当试验的结果是 $j$ 的时候你总共能够赢得 $xr_i(j)$. 赌博策略是向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$，其中每一个 $x_i$ 可以是正的或者负的(或者是 0)，它表示对于每一个 $i=1$，$\cdots$，$n$ 你同时在第 $i$ 个赌博上押了 $x_i$ 个单位的金额. 若试验的结果是 $j$ 你就能够从这个赌博策略中赢得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j).$$

88

**命题 6.3.2**(套利定理)　下面的命题只有一个是正确的，要么

ⅰ)存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$使得

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad \text{对所有 } i = 1,\cdots,n;$$

要么

ⅱ)存在一个赌博策略 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$使得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > 0, \quad \text{对所有 } j = 1,\cdots,m.$$

该定理表明，一定存在一个概率向量，在这个概率下所有赌注的期望收益都等于0，否则就存在一个总是能够获得正收益的赌博策略.

**证明**：令 $x_{n+1}$表示一个赌博者确信稳赢的金额，并且考虑使得这个数额达到最大. 如果该赌博者使用的赌博策略是$(x_1, \cdots, x_n)$，那么当实验结果为 $j$ 时，他就能够赢得$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j)$. 因此，他将选择赌博策略$(x_1, \cdots, x_n)$和 $x_{n+1}$以使得

$$\text{最大化 } x_{n+1}$$

$$\text{在} \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) \geqslant x_{n+1}, \quad j = 1,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

令

$$a_{i,j} = -r_i(j), \quad i = 1,\cdots,n, \quad a_{n+1,j} = 1,$$

可以把上面的线性规划重新写为下面的形式：

$$\text{最大化 } x_{n+1}$$

$$\text{在} \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} x_i \leqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

注意到在上面的线性规划问题中 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，$c_{n+1}=1$，并且约束值的上限都等于0(即所有的 $b_j=0$). 因此，它的对偶问题就是选择变量，$y_1, \cdots, y_m$使得：

89

$$\text{最小化 } 0$$

$$\text{在} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_j = 0, \quad i = 1,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{n+1,j} y_j = 1,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

由 $a_{i,j}$的定义，这个对偶线性规划问题可以表示为：

$$\text{最小化 } 0$$

$$\text{在} \sum_{j=1}^{m} r_i(j) y_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, m \text{ 条件下.}$$

注意到这个对偶问题是可行的并且其最小值是 0 当且仅当存在一个概率向量($y_1$，…，$y_m$)，在这个概率下所有赌博的期望收益都为 0. 上述线性规划原问题也是可行的，这是因为 $x_i=0(i=1，\cdots，n+1)$满足它的约束条件. 所以由对偶定理，如果对偶问题是可行的，那么原问题的最优值是 0，因此稳赢是不可能的. 另一方面，如果对偶问题是不可行的，那么由对偶定理可知原问题也不存在最优解. 这就意味着 0 不是最优解，因此就存在一个最小收益为正的赌博策略. (当对偶问题不可行时原问题不存在最优解，其原因是此时原问题是无界的. 也就是说，如果一个赌博策略 $\boldsymbol{x}$ 有保证的收益至少为 $v>0$，那么 $c\boldsymbol{x}$ 有保证的收益则至少为 $cv$). □

[90]

## 6.4 习题

**练习 6.1** 考虑一个试验，它有三种可能的结果，这三种结果以及相应投注赔率如下表所示：

| 结果 | 赔率 |
|---|---|
| 1、 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |

请问此试验存在一个稳赢的赌博策略吗？

**练习 6.2** 考虑一个试验，它有四种可能结果，前三种可能结果的投注赔率如下表所示：

| 结果 | 赔率 |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |

当允许赌任何一个结果出现或者不出现的时候，如果要使得套利不存在，那么关于结果 4 的投注赔率必须是多少？

**练习 6.3** 当投注赔率如下表所示时重复练习6.1.

| 结果 | 赔率 |
| --- | --- |
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |
| 3 | 2 |

**练习 6.4** 假设在练习6.1中，一个人也可以选择任何一对结果 $i \neq j$ 并且结果要么是 $i$ 要么是 $j$. 如果要避免套利机会的出现，这三个赌博的投注赔率应该各是多少？ 91

**练习 6.5** 在例6.1a 中，证明如果有

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+o_i} \neq 1$$

那么下面的赌博策略

$$x_i = \frac{(1+o_i)^{-1}}{1-\sum_{i=1}^{m}(1+o_i)^{-1}}, \quad i=1,\cdots,m,$$

会赢得价值为 1 的收益.

**练习 6.6** 在例6.1b 中，假设可以选择购买卖出期权，这个期权的持有者有权利选择是否在一个时间段结束的时候以每股 150 的价格卖出该股票. 求使得套利机会不存在时这个卖出期权的价格 $P$；然后证明所得结果的买入和卖出期权价格满足期权平价公式(见命题5.2.2).

**练习 6.7** 假设在每一个时间段内，一个证券的价值或者上涨为原来的两倍或者下跌为原来的二分之一(即 $u=2$, $d=1/2$). 如果该证券的初始价格为100，求一个买入期权的无套利价格，这个期权允许持有者在两个时间段结束时以每股150的价格购买股票.

**练习 6.8** 假设在例6.1b中，在时刻 1 该证券有三种可能的价格：50，100，200. (这表明该证券的价格有可能会保持不变.)根据套利定理确定一个区间，当 $C$ 落在这个区间时不会有套利出现.

如果一个赌博策略满足(沿用 6.1 节中的记号)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) \geqslant 0, \quad j=1,\cdots,m,$$

92

并且有至少一个 $j$ 使得不等号严格成立，这样的策略称为*弱套利策略*. 也就是说，套利是指在任何结果出现时都会有正收益的策略，而弱套利是指不会导致任何损失并且至少一种结果有正收益的策略. (我们可以把套利看成是*免费的午餐*，而把弱套利看成是*免费的彩票*.)可以证明弱套利不存在的条件当且仅当存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}$，它的所有元素都是正的，并且使得

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

换句话说，如果存在一个概率向量，在这个向量里每一个可能结果的权重都是正的，并且它使得所有的赌博都是公平的，那么弱套利就不存在.

**练习 6.9** 在练习6.8中，证明若期权的价格等于我们所决定的区间的任何一个端点，那么弱套利就有可能存在.

**练习 6.10** 在6.2节的模型中取 $n=1$，如何利用购买和卖空该证券来复制期权?

**练习 6.11** 假设证券在任何一个时间段的价格都是它在上一个时间段的价格乘上 $u=1.25$ 或者乘上 $d=0.8$，并且该证券的初始价格为100. 考虑下面"特殊"的欧式买入期权，这个期权在五个时间段后交割，其交割价为100. 这个期权的特殊之处在于，它只有在两个时间段后证券价格严格低于100时才会有效. 也就是说，只有在前两个时间段价格下降的条件下该期权才会生效. 这个期权最终的收益是

$$\text{在时刻 5 的收益} = I(S(5) - 100)^+,$$

其中当 $S(2)<100$ 时 $I=1$，当 $S(2)\geqslant 100$ 时 $I=0$. 假设每个时间段内的利率是 [93] $r=0.1$.

a)求该期权的无套利价格(在时刻 0).

b)问题 a)中的价格是唯一的吗? 给出简要证明.

c)如果每一次价格变化时价格上升或下降的概率都是相同的，那么该期权持有者在期权到期日的期望收益是多少?

## 参考文献

[1] De Finetti, Bruno (1937). "La prevision: see lois logiques, ses sources subjectives." *Annales de l' Institut Henri Poincaré* 7: 1－68; English translation in S. Kyburg (Ed.) (1962), *Studies in Subjective Probability*, pp. 93－158. New York: Wiley.

[94] [2] Gale, David (1960). *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill.



# 第7章　Black-Scholes 公式

## 7.1　引言

我们将在本章中推导著名的 Black-Scholes 公式. 在假定证券价格变化服从几何布朗运动的前提下，该公式给出了关于这种证券买入期权的唯一无套利价格. 在 7.2 节中将给出作为 5 个变量函数的无套利价格的推导过程；在 7.3 节中讨论此价格函数的一些性质；若期权的实际价格不等于由该公式决定的价格，在 7.4 节中我们会给出一种投资策略，通过它从理论上就会得到套利机会；7.5 节比本章的其他节理论性更强些，在这节中我们将用更简单的方法推导出下面的结果：1)Black-Scholes 公式的计算形式；2)无套利价格函数关于其 5 个参数的偏导数.

## 7.2　Black-Scholes 公式

考虑一个交割价为 $K$、到期日是 $t$ 的买入期权，这个期权允许它的持有者在时刻 $t$ 以价格 $K$ 购买一个单位的标的证券. 进一步假设名义利率是连续复利利率 $r$，而且这种证券的价格变化过程服从漂移参数为 $\mu$、波动参数为 $\sigma$ 的几何布朗运动. 在这些假设条件下，我们能够得到上述期权的唯一无套利价格.

首先，令 $S(y)$ 表示标的证券在时刻 $y$ 时的价格. 由于 $\{S(y),\ 0\leqslant y\leqslant t\}$ 服从漂移参数为 $\mu$、波动参数为 $\sigma$ 的几何布朗运动，作为该模型的 $n$ 阶近似，我们可假设每过 $t/n$ 个单位的时间，证券的价格就会变化一次；它的新价格或者等于旧价格乘以因子

$$u=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t/n}},\quad 概率为\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t/n}\right)$$



或者
等于旧价格乘以

$$d=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{t/n}},\quad 概率为\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t/n}\right).$$

因此，这个 $n$ 阶近似模型就是一个 $n$ 阶的二项模型. 这个二项模型里每一个时间段 $t/n$ 后的价格要么上涨为原来的价格乘上系数 $u$，要么下跌为原来的价格乘上系数 $d$. 所以，如果令

$$X_i=\begin{cases}1 & 若\ S(it/n)=uS((i-1)t/n),\\ 0 & 若\ S(it/n)=dS((i-1)t/n),\end{cases}$$

那么由 6.2 节的结果我们可以看到，在这个 $n$ 阶近似模型里，唯一能够使得所有

购买这种证券的赌博都公平的概率，就是使得 $X_i$ 相互独立的概率，并且有

$$\begin{aligned} p &\equiv P\{X_i = 1\} \\ &= \frac{1 + rt/n - d}{u - d} \\ &= \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{t/n}} + rt/n}{e^{\sigma\sqrt{t/n}} - e^{-\sigma\sqrt{t/n}}}. \end{aligned}$$

利用函数 $e^x$ 在 0 点的三阶泰勒展开式

$$e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 - \sigma\sqrt{t/n} + \sigma^2 t/2n,$$
$$e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{t/n} + \sigma^2 t/2n.$$

我们得到

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{\sigma\sqrt{t/n} - \sigma^2 t/2n + rt/n}{2\sigma\sqrt{t/n}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{t/n}\right). \end{aligned}$$

这就是说，在 $n$ 阶近似模型里唯一的风险中性测度是基于下面的假设得到的：在每一个时间段，证券价格要么以概率 $p$ 上涨为原来的 $e^{\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍，要么以概率 $1-p$ 下跌为原来的 $e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍. 但是，由 3.2 节我们知道，当 $n\to\infty$ 时，这个风险中性分布收敛到一个漂移参数为 $r-\sigma^2/2$，波动参数为 $\sigma$ 的几何布朗运动的分布. 故随着 $n$ 越来越大，$n$ 阶近似模型就越来越接近几何布朗运动，于是有理由假设(这是可以严格证明的)，这个风险中性的几何布朗运动分布，是所有描述证券价格随时间演化规律的分布中，唯一一个能够使得将所有关于证券的买卖视为赌博时，它们都公平的概率分布(换句话说，我们已经证明：如果标的证券的价格服从一个波动参数是 $\sigma$ 的几何布朗运动，那么关于价格序列的分布律中，唯一一个能够使得对所有购买证券的赌博都公平的概率分布是漂移参数为 $r-\sigma^2/2$、波动参数为 $\sigma$ 的几何布朗运动的分布). 因此，根据套利定理，期权要么根据风险中性几何布朗运动的概率分布来定价从而使得赌博公平，要么存在套利机会.

96

现在，在风险中性几何布朗运动下，$S(t)/S(0)$ 是一个均值参数为 $(r-\sigma^2/2)t$，方差参数为 $\sigma^2 t$ 的对数正态随机变量. 因此，如果有这样的一个买入期权，它允许持有者在时刻 $t$ 以事先确定的价格 $K$ 购买该证券，那么此期权唯一的无套利价格 $C$ 是

$$\begin{aligned} C &= e^{-rt}E[(S(t) - K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(S(0)e^W - K)^+], \end{aligned} \tag{7-1}$$

其中 $W$ 是一个均值参数为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差参数为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量.

等式(7-1)的右边可以用下面的表达式精确地表示出来(推导见 7.4 节)，这

就是著名的 Black-Scholes 期权定价公式：

$$C=S(0)\Phi(\omega)-Ke^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}), \tag{7-2}$$

其中

$$\omega=\frac{rt+\sigma^2t/2-\log(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}}$$

而 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

**例 7.2a** 假设一个证券现在的售价是 30，名义利率是 8%（单位时间为一年），这种证券的波动率是 0.20. 求一个三个月后到期且执行价为 34 的买入期权的无套利价格. [97]

**解**：本题中的参数是：

$$t=0.25,\quad r=0.08,\quad \sigma=0.20,\quad K=34,\quad S(0)=30,$$

所以我们就有

$$\omega=\frac{0.02+0.005-\log(34/30)}{(0.2)(0.5)}\approx-1.0016.$$

由此得到

$$\begin{aligned}C&=30\Phi(-1.0016)-34e^{-0.02}\Phi(-1.1016)\\&=30(0.15827)-34(0.9802)(0.13532)\\&\approx0.2383.\end{aligned}$$

这个期权合适的价格就应该是 24 美分. □

**注** 1)我们也可以这样推导期权的无套利价格 $C$：首先在 $n$ 阶近似模型下考虑期权唯一的无套利价格，然后再令 $n$ 趋向于无穷大.

2)当一个证券的初始价格为 $s$ 时，令 $C(s,t,K)$ 表示到期日是 $t$、执行价是 $K$ 的期权的无套利价格. 也就是说，$C(s,t,K)$ 就是当 $S(0)=s$ 时由 Black-Scholes 期权定价公式所计算出的 $C$. 如果在时刻 $y$，标的证券的价格是 $S(y)=s_y$，那么 $C(s_y,t-y,K)$ 就是期权在时刻 $y$ 时唯一的无套利价格. 这是因为，在时刻 $y$，期权会在经过时间 $t-y$ 后以相同的执行价 $K$ 到期，并且在下面 $t-y$ 个单位时间内该证券仍然会服从初始价值为 $s_y$ 的几何布朗运动.

3)由命题 5.2.2 的买入-卖出期权平价公式，可以获得标的证券初始价格为 $s$，执行价为 $K$，到期日是 $t$ 的欧式卖出期权的无套利价格计算公式. 我们记此价格为 $P(s,t,K)$，那么它可由下式给出

$$P(s,t,K)=C(s,t,K)+Ke^{-rt}-s,$$

其中 $C(s,t,K)$ 是关于同一个证券买入期权的无套利价格. [98]

4)由于风险中性几何布朗运动仅依赖于 $\sigma$ 的变化，而不依赖于 $\mu$，

所以我们知道期权的无套利价格对布朗运动的依赖性仅仅是通过对布朗运动的波动参数 $\sigma$ 的依赖来体现的，而与漂移参数无关.

5)如果我们假定证券价格演化过程服从的几何布朗运动分布的波动率 $\sigma$ 固定不变，而漂移参数是随时间变化的，那么期权的无套利价格也是不变的. 这是因为，尽管在时刻 $t$ 之前价格演化的漂移参数是随时间变化的，但 $n$ 阶近似模型仍是一个二项模型，价格要么上涨为原来的 $u=e^{\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍，要么下跌为原来的 $d=e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍，所以它唯一的风险中性分布与漂移参数为常数时是一样的，由此我们就能够得到相同的期权无套利价格.（漂移参数随时间变化对我们推导 Black-Scholes 期权定价公式唯一的影响就是它会导致在不同的时间段内价格上涨的概率不同，但是这并不会影响风险中性概率的大小.）

## 7.3 Black-Scholes 期权定价公式的一些性质

无套利期权定价公式 $C=C(s, t, K, \sigma, r)$ 是一个含有下面五个变量的函数：证券的初始价格 $s$；期权到期日 $t$；执行价 $K$；证券的波动参数 $\sigma$ 和利率 $r$. 为了进一步研究期权价格作为这些变量的函数所具有的性质，我们利用等式(7-1)：

$$C(s,t,K,\sigma,r) = e^{-rt}E[(se^{W} - K)^{+}],$$

其中 $W$ 是一个均值为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量.

**$C=C(s, t, K, \sigma, r)$ 的性质**

1)$C$ 是关于 $s$ 的单调递增凸函数.

也就是说，如果其他四个变量保持不变的话，那么期权的无套利价格就是关于证券初始价格的一个单调递增凸函数. 这两个结果(其中第一个单调性的结果是非常直观的)可由等式(7-1)推得. 首先我们注意到(见图 7-1)，对任意一个正的常数 $a$，函数 $e^{-rt}(sa-K)^{+}$ 关于变量 $s$ 是一个单调递增凸函数. 这是因为 $W$ 的概率分布不依赖于 $s$ 的变化，对所有的 $W$，$e^{-rt}(se^{W}-K)^{+}$ 关于 $s$ 单调递增并且是凸的，因此它的期望值也是关于 $s$ 的一个递增凸函数.

99

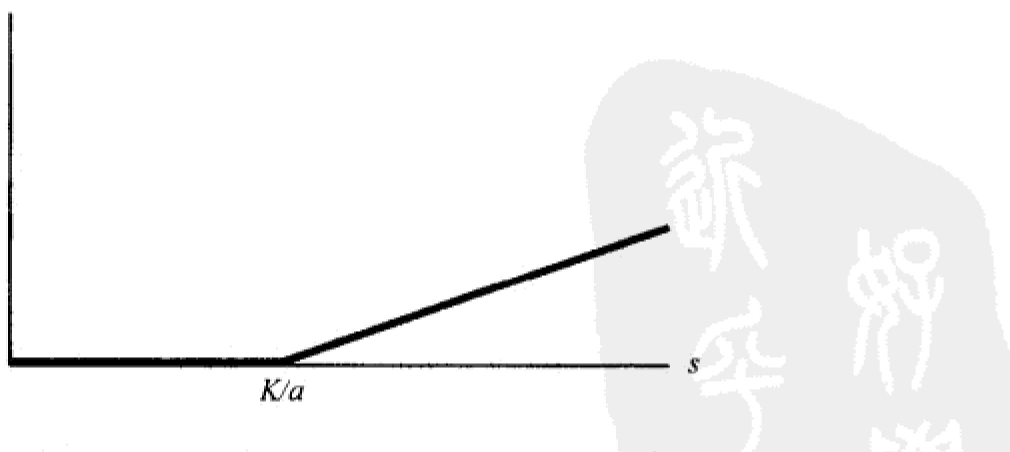



图 7-1 递增凸函数 $f(s)=e^{-rt}(sa-K)^{+}$

2)$C$ 是关于 $K$ 的单调递减凸函数.

这个结论可以由下面的事实得到：对所有的 $W$，$e^{-rt}(se^W-K)^+$ 关于 $K$ 是单调递减并且是凸的(见图 7-2)，因此它的期望也是关于 $K$ 的一个递减凸函数. (此结果与 5.2 节的一般性套利理论结论一致，那里我们没有对证券的价格演化模型进行任何假设.)

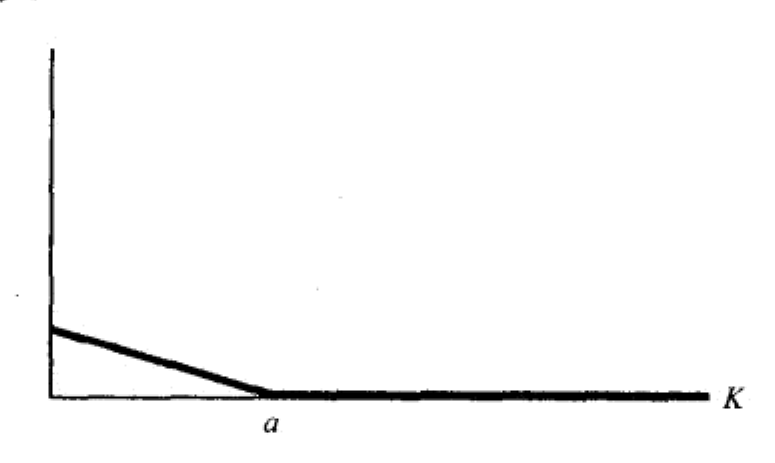



图 7-2 递减凸函数 $f(K)=e^{-rt}(a-K)^+$

100

3)$C$ 关于 $t$ 是单调递增的.

尽管我们可以用数学的方法得到这个结果(见 7.4 节)，但是通过下面这种更简单、更直观的观察可以立刻得到结论：只要注意，如果这是一个美式买入期权，那么它的价格会随着 $t$ 的增加而增加(无论怎样延长到期日都不会产生负面的影响，这是因为期权的持有者总是可以选择不去理会它). 又由于欧式买入期权的价格和美式买入期权的价格相同(见命题 5.2.1)，所以结论就是显而易见的了.

4)$C$ 关于 $\sigma$ 是单调递增的.

注意，证券的价格在到期日下跌到执行价以下再多也不会给期权持有者造成更多的损失，但是如果届时此价格很高的话，期权的持有者会获得很大的利润，所以这个结论看起来是非常直观的. 然而，事实上它比表面上看起来要更复杂，这是因为 $\sigma$ 的增加不仅导致在风险中性概率下，最终价格取对数之后的方差会增加，而且会导致它的期望值减少(因为 $E[\log(S(t)/S(0))]=(r-\sigma^2/2)t$). 尽管这样，这个结论还是正确的，我们将在后面的 7.4 节中给出它的数学证明.

5)$C$ 关于 $r$ 是单调递增的.

为证明这个性质，首先注意我们可以把一个均值为 $(r-\sigma^2/2)t$，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量 $W$，写成下面的形式

$$W = rt - \sigma^2 t/2 + \sigma\sqrt{t}Z,$$

其中 $Z$ 是一个均值为 0、方差为 1 的标准正态随机变量. 因此，由等式(7-1)我们有：

$$C = E[(se^{-\sigma^2 t/2+\sigma\sqrt{t}Z} - Ke^{-rt})^+].$$

由于$(se^{-\sigma^2 t/2+\sigma\sqrt{t}Z}-Ke^{-rt})^+$关于$r$是单调递增的，所以它的期望值关于$r$也是单调递增的，这样就得到了所要的结论. 事实上，我们还可以通过前面的讨论得到这个结论，在无套利几何布朗运动模型中，增加利率所产生的唯一影响就是它降低了期权交割时所付金额的当前价值，因此也就增加了期权的价格.

101 买入期权的价格变化与其标的证券的价格变化的比率称为delta，记为$\Delta$. 更正式地，如果$C(s, t, K, \sigma, r)$是由Black-Scholes期权定价公式得到的期权价格，那么$\Delta$就是它关于$s$的偏导数，即：

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial s}C(s,t,K,\sigma,r).$$

在7.4节中我们将证明

$$\Delta=\Phi(\omega)$$

其中，和等式(7-2)中一样，

$$\omega=\frac{rt+\sigma^2 t/2-\log(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}}.$$

delta可以用来构造投资组合以对冲风险. 例如，假设投资者感觉一个买入期权的价值被低估了并且因此购买了这个期权，那么为了保护他自己免受因期权价格下降而产生的影响，他可以同时卖空一定数量的该种证券. 为了决定究竟应该卖出多少股这种证券，我们注意到如果证券的价格下降一个很小的数量$h$，那么期权的价值就会下降$h\Delta$这么多. 这也就意味着，如果这个投资者卖空了$\Delta$股该证券的话，那么他的损失就可以得到弥补. 因此，一个合理的对冲策略应该是每买入一个期权就卖空$\Delta$股该证券. 我们会在下一节中精确地表述这个有启发性的结论，也就是delta对冲套利策略——在理论上，当一个买入期权的价格与由Black-Scholes期权定价公式得到的价格不一致时，这个策略就可以用来制造套利机会.

## 7.4 delta对冲套利策略

在本节中我们将证明如何用一个固定的初始支付(它可以分为初始购买一定的股份和初始的银行存款两种，而且每一种都可以是负的)和连续的资金调整来复制一个期权的回报. 首先在有限阶近似模型中对其加以说明，再扩展到证券价格演化服从几何布朗运动情形.

首先，考虑一个证券，它的初始价格是$s$，并且假设每过一个时间段后它的价格变为原来的价格乘上$u$或者乘上$d$. 我们要决定的是，为了能在时刻1有足够的钱用于支付在时刻0必须具备的资金数$x$，时刻1的支出为$a$或$b$取决于此时股票价格是$us$还是$ds$. 为了决定$x$的值，以及使我们有能力将来支付$a$或$b$的投资策略. 假设已买了$y$股股票并在$x-ys\geqslant 0$时把剩余的钱$x-ys$存入银行；

102

在 $x-ys<0$ 时从银行借了 $ys-x$ 款项．那么对于初始的投资 $x$，在时刻 1 的收益为

$$\text{时刻 1 的收益} = \begin{cases} yus + (x-ys)(1+r) & \text{若 } S(1) = us, \\ yds + (x-ys)(1+r) & \text{若 } S(1) = ds, \end{cases}$$

其中 $S(1)$是时刻 1 时该证券的价格，$r$ 是每个时间段内的利率．因此，如果我们选择 $x$ 和 $y$ 使得

$$yus + (x-ys)(1+r) = a,$$
$$yds + (x-ys)(1+r) = b,$$

那么当从银行取出钱后（或者是偿还贷款后）我们就有足够的钱用于支付了．用上面的第一个等式减去第二个等式，有

$$y = \frac{a-b}{s(u-d)}.$$

把 $y$ 的表达式代入到第一个等式中我们得到

$$\frac{a-b}{u-d}[u-(1+r)] + x(1+r) = a$$

或者

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+r}\left(a\left[1-\frac{u-(1+r)}{u-d}\right]+b\,\frac{u-1-r}{u-d}\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(a\,\frac{1+r-d}{u-d}+b\,\frac{u-1-r}{u-d}\right) \\ &= p\,\frac{a}{1+r}+(1-p)\,\frac{b}{1+r}, \end{aligned}$$

其中

$$p = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

103

也就是说，在 0 时刻需要的资金数量等于时刻 1 应支付的金额在风险中性概率下的期望现值．此外此投资策略要求购买 $y=\dfrac{a-b}{s(u-d)}$股该证券并且把剩余的钱存入银行．

**注** 如果 $a>b$，即当在时刻 1 发生的支付是付给一个买入期权持有者的情形，那么有 $y>0$，因此购买的证券数量为正的；如果 $a<b$，即当在时刻 1 的支付是付给一个卖出期权持有者情形，那么有 $y<0$，因此应该卖空 $-y$ 股该证券．

接下来要考虑的问题是，如何决定在 0 时刻需要的初始投资以满足在时刻 2 所发生的支付．当证券在时刻 2 的价格是 $u^i d^{2-i} s\,(i=0, 1, 2)$时相应的支付记为

$x_{i,2}$. 为解决这个问题，首先需要考虑时刻1时该证券的各种可能价格，并在每一种可能价格下，确定该时刻所需投资金额以保证在时刻2有能力支付所发生的费用. 如果在时刻1证券价格是 $us$，那么时刻2当证券价格是 $u^2s$ 时，需要支付的费用为 $x_{2,2}$；而若时刻2证券价格是 $uds$，需要支付的费用为 $x_{1,2}$. 因此，根据前面的分析可知，假如在时刻1的价格是 $us$，那么我们在时刻1所需要的钱数为

$$x_{1,1}=p\frac{x_{2,2}}{1+r}+(1-p)\frac{x_{1,2}}{1+r},$$

而投资策略为：购买

$$y_{1,1}=\frac{x_{2,2}-x_{1,2}}{us(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行. 类似地，如果时刻1的价格是 $ds$，那么为了能够在时刻2支付所发生的费用，在时刻1我们需要的钱数为

$$x_{0,1}=p\frac{x_{1,2}}{1+r}+(1-p)\frac{x_{0,2}}{1+r},$$

相应的投资策略为：购买

104

$$y_{0,1}=\frac{x_{1,2}-x_{0,2}}{ds(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行. 现在，我们在0时刻需要投资足够的钱以便在时刻1能够有 $x_{1,1}$ 或者 $x_{0,1}$ 资产，这由届时该证券的价格是 $us$ 还是 $ds$ 而定. 因此，在0时刻我们需要

$$\begin{aligned}x_{0,0}&=p\frac{x_{1,1}}{1+r}+(1-p)\frac{x_{0,1}}{1+r}\\&=p^2\frac{x_{2,2}}{(1+r)^2}+2p(1-p)\frac{x_{1,2}}{(1+r)^2}+(1-p)^2\frac{x_{0,2}}{(1+r)^2}.\end{aligned}$$

这又一次表明当前所需钱的数量就是在风险中性测度下，最终所需支付的期望钱数的现值. 投资策略为：购买

$$y_{0,0}=\frac{x_{1,1}-x_{0,1}}{s(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行.

我们可以很容易地把上面的过程归纳为一般的 $n$ 阶段的问题，若 $n$ 个时间段结束时证券价格是 $u^id^{n-i}s$，此时应支付的费用为 $x_{i,n}$. 在时刻 $j$，假如已知此时证券价格是 $u^id^{j-i}s$，那么在该时刻所需投入的钱数 $x_{i,j}$ 就等于最终的支付在时刻 $j$ 的条件期望值. 假设是在风险中性概率下考虑价格的变化过程，期望值就是在这个概率下计算的.（换句话说，价格的前后变化是独立的，每一个新的价格都等于上一个时间段的价格以概率 $p$ 乘上因子 $u$，或者以概率 $1-p$ 乘上

因子 $d$.)

如果最终是支付给一个买入期权的持有者，假设该期权的到期日是 $n$，执行价是 $K$，那么在时刻 $n$ 的支付金额就是

$$x_{i,n}=(u^i d^{n-i}s-K)^+,\quad i=0,\cdots,n,$$

只要此时证券的价格是 $u^i d^{n-i}s$. 由于我们的策略复制了期权产生的收益，根据一价律(和套利定理)，便得到初始需要的钱数 $x_{0,0}$，它也等于该期权唯一的无套利价格. 而且，当时刻 $j$ 证券价格为 $u^i d^{n-i}s$ 时，所需要的钱数 $x_{i,j}$ 就是该时刻同种标的证券期权的无套利价格. 当在 0 时刻期权的价格 $C$ 比 $x_{0,0}$ 高时，为了获取套利机会，我们可以卖出期权，然后用卖出期权所得收入 $x_{0,0}$ 来支付在时刻 $n$ 应付的支出，由此获取正的收益 $C-x_{0,0}$. 而如果假设 $C<x_{0,0}$，那么当该证券在时刻 $n$ 的价格是 $u^i d^{n-i}s(i=0,\cdots,n)$ 时，与我们前面讲的把初始财富 $x_{0,0}$ 转化为时刻 $n$ 的财富 $x_{i,n}$ 的投资过程相反(即把买变成卖，把卖变成买)，就能把初始的债务 $x_{0,0}$ 转化为在时刻 $n$ 的债务 $x_{i,n}$. 因此，当 $C<x_{0,0}$ 时，我们可以贷款 $x_{0,0}$，然后用其中的 $C$ 来购买期权，就可以实现把初始的债务转化成在 $n$ 时刻的债务. 但在 $n$ 时刻从期权所得的收益恰恰就是当时所欠的债务. 这样就构造了一个套利机会. 因此，无论出现上面哪一种情形，在 0 时刻我们都会有收益 $|C-x_{0,0}|$，而相应的投资策略又保证我们此后不会有额外的损失或者收益. 也就是说，在扣除收益之后，我们的投资策略对冲了所有的未来风险. [105]

现在我们要决定的是，当证券的价格变化服从波动率为 $\sigma$ 的几何布朗运动时，一个执行价为 $K$ 的买入期权的对冲策略. 首先考虑有限阶近似，此时每经过 $h$ 个单位的时间，证券的价格要么上涨为原来的 $e^{\sigma\sqrt{h}}$ 倍，要么下跌为原来的 $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ 倍. 假设股票现在的价格是 $s$，并且经过时间 $t$ 后买入期权到期. 由于 $h$ 个单位时间以后，股票的价格为 $se^{\sigma\sqrt{h}}$ 或者 $se^{-\sigma\sqrt{h}}$，因此在下一个时间段，为了能够使用对冲策略，当证券价格是 $se^{\sigma\sqrt{h}}$ 时，我们所需要投资的钱数为 $C(se^{\sigma\sqrt{h}},t-h)$；而如果价格是 $se^{-\sigma\sqrt{h}}$，所需的钱数则是 $C(se^{-\sigma\sqrt{h}},t-h)$. 这里 $C(s,t)$ 表示在证券的当前价格是 $s$ 时，一个执行价为 $K$ 且经过时间 $t$ 后到期的买入期权的无套利价格(这个记号没有显示 $C$ 对 $K$，$r$ 和 $\sigma$ 的依赖性). 因此，当证券的价格是 $s$ 并且距离到期日还有时间 $t$ 时，对冲策略要求持有

$$\frac{C(se^{\sigma\sqrt{h}},t-h)-C(se^{-\sigma\sqrt{h}},t-h)}{se^{\sigma\sqrt{h}}-se^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

股该证券.

在几何布朗运动情形下，当证券的价格是 $s$ 并且买入期权经过时间 $t$ 到期时，为了决定应该持有的股票数量，我们在上面表达式中令 $h$ 趋向于 0. 此时所需要确定的是 [106]

$$\lim_{h\to 0}\frac{C(se^{\sigma\sqrt{h}},t-h)-C(se^{-\sigma\sqrt{h}},t-h)}{se^{\sigma\sqrt{h}}-se^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{C(s e^{\sigma a}, t - a^2) - C(s e^{-\sigma a}, t - a^2)}{s e^{\sigma a} - s e^{-\sigma a}}.$$

然而，由微积分法则(洛必达法则和二元变量函数微分的链式法则)有

$$\begin{aligned}
&\lim_{a \to 0} \frac{C(s e^{\sigma a}, t - a^2) - C(s e^{-\sigma a}, t - a^2)}{s e^{\sigma a} - s e^{-\sigma a}} \\
&= \lim_{a \to 0} \frac{s\sigma e^{\sigma a} \frac{\partial}{\partial y} C(y,t) \mid_{y = s e^{\sigma a}} + s\sigma e^{-\sigma a} \frac{\partial}{\partial y} C(y,t) \mid_{y = s e^{-\sigma a}}}{s\sigma e^{\sigma a} + s\sigma e^{-\sigma a}} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} C(y,t) \mid_{y=s} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} C(s,t).
\end{aligned}$$

因而，一个执行价是 $K$，到期日是 $T$ 的买入期权的收益可以由下面的投资策略复制. 这个投资策略需要投入资金 $C(S(0), T, K)$，并且在距离到期日还有时间 $t$ 时，如果当时的证券价格是 $s$ 就持有 $\frac{\partial}{\partial s} C(s, t, K)$ 股该证券，然后把此时的剩余资金存入银行(如果剩余资金是正的)或者从银行贷款(如果剩余资金是负的).

如果 $(K, T)$ 买入期权的市场价格比 $C(S(0), T, K)$ 高，就可以卖出一个期权，然后用所得的 $C(S(0), T, K)$ 按照上面的策略来复制期权的支付，这样就能获得一个套利机会. 当市场价格比 $C(S(0), T, K)$ 低时，也可以通过反向操作来获得套利机会. 即贷款 $C(S(0), T, K)$，然后用其中的 $C$ 购买一个 $(K, T)$ 买入期权(剩余的钱属于你自己). 于是当证券的价格是 $s$ 并且距离到期日还有时间 $t$ 时保持 $\frac{\partial}{\partial s} C(s, t, K)$ 股该证券的空头头寸. 将来自这些空头头寸的资金投资后，连同买入期权一起就可以用于偿还贷款和弥补最终的空头头寸了.

107

## 7.5 一些推导过程

在 7.5.1 节，我们给出等式(7-2)，即 Black-Scholes 公式计算形式的推导过程. 在 7.5.2 节，我们将导出 $C(s, t, K, \sigma, r)$ 关于它的变量 $s, t, K, \sigma, r$ 的偏导数.

### 7.5.1 Black-Scholes 公式

以

$$C(s,t,K,\sigma,r) = E[e^{-rt}(S(t) - K)^+]$$

表示利率为 $r$，标的证券的初始价格是 $s$ 时，一个执行价是 $K$，到期日是 $t$ 的买入期权的风险中性价格. 这里我们假定标的证券价格的演变过程服从波动率为 $\sigma$

的几何布朗运动．为了推导 Black-Scholes 期权定价公式及 $C$ 的偏导数，需要用到下面的事实：在风险中性概率下，$S(t)$可以表示为

$$S(t) = s\exp\{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}Z\}, \tag{7-3}$$

其中 $Z$ 是标准正态随机变量．

令 $I$ 为期权到期时以实值结束这一事件的示性随机变量，即

$$I = \begin{cases} 1 & 若\ S(t) > K, \\ 0 & 若\ S(t) \leqslant K. \end{cases} \tag{7-4}$$

我们需要下面的引理．

**引理 7.5.1** 利用表达式(7-3)和(7-4)，有

$$I = \begin{cases} 1 & 若\ Z > \sigma\sqrt{t}-\omega, \\ 0 & 其他, \end{cases}$$

其中

$$\omega = \frac{rt+\sigma^2 t/2-\log(K/s)}{\sigma\sqrt{t}}.$$

108

**证明：**

$$\begin{aligned} S(t) > K &\Leftrightarrow \exp\{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}Z\} > K/s \\ &\Leftrightarrow Z > \frac{\log(K/s)-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ &\Leftrightarrow Z > \sigma\sqrt{t}-\omega. \end{aligned}$$

□

**引理 7.5.2**

$$E[I] = P\{S(t) > K\} = \Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}),$$

其中 $\Phi$ 是标准正态分布函数．

**证明：** 由定义可得

$$\begin{aligned} E[I] &= P\{S(t) > K\} \\ &= P\{Z > \sigma\sqrt{t}-\omega\} \quad (由引理\ 7.5.1) \\ &= P\{Z < \omega-\sigma\sqrt{t}\} \\ &= \Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}). \end{aligned}$$

□

**引理 7.5.3**

$$e^{-rt}E[IS(t)] = s\Phi(\omega).$$

**证明：** 取 $c=\sigma\sqrt{t}-\omega$，由表达式(7-3)和引理 7.5.1 得到

$$E[IS(t)] = \int_c^\infty s\exp\{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s \exp\{(r-\sigma^2/2)t\} \int_c^{\infty} \exp\{-(x^2 - 2\sigma\sqrt{t}x)/2\} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s \mathrm{e}^{rt} \int_c^{\infty} \exp\{-(x-\sigma\sqrt{t})^2/2\} \mathrm{d}x$$

$$= s\mathrm{e}^{rt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y \quad (\text{令 } y = x - \sigma\sqrt{t})$$

$$= s\mathrm{e}^{rt} P\{Z > -\omega\}$$

109

$$= s\mathrm{e}^{rt} \Phi(\omega).$$

□

**定理 7.5.1** (Black-Scholes 定价公式)

$$C(s,t,K,\sigma,r) = s\Phi(\omega) - K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}).$$

**证明:**

$$\begin{aligned} C(s,t,K,\sigma,r) &= \mathrm{e}^{-rt}E[(S(t)-K)^+] \\ &= \mathrm{e}^{-rt}E[I(S(t)-K)] \\ &= \mathrm{e}^{-rt}E[I(S(t)] - K\mathrm{e}^{-rt}E[I], \end{aligned}$$

由引理 7.5.2 和引理 7.5.3 得到所需的结论. □

## 7.5.2 偏导数

设

$$C = C(s,t,K,\sigma,r) = E[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)^+] = E[\mathrm{e}^{-rt}I(S(t)-K)]$$

表示 Black-Scholes 期权定价公式，其中 $I$ 由式(7-4)定义. 令 $x$ 表示 $s$，$t$，$K$，$\sigma$，$r$ 五个参数中的某一个，为决定

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} E[\mathrm{e}^{-rt} I(S(t)-K)],$$

利用求偏导数和取期望运算可以交换次序，得到

$$\frac{\partial C}{\partial x} = E\left[\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-rt} I(S(t)-K)\right].$$

因为

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0, \text{若 } S(t) \neq K,$$

我们知道，对一个乘积的导数用链式法则，有

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-rt} I(S(t)-K) = I \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K), \text{若 } S(t) \neq K.$$

又因为 $P\{S(t)=K\}=0$，从上面的讨论得到

110

$$\frac{\partial C}{\partial x} = E\left[I \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)\right]. \tag{7-5}$$

下面推导 $C$ 关于 $K$，$s$，$r$ 的偏导数.

**命题 7.5.1**

$$\frac{\partial C}{\partial K}=-\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

**证明**：由于 $S(t)$不依赖于 $K$，

$$\frac{\partial}{\partial K}\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)=-\mathrm{e}^{-rt}.$$

由等式(7-5)得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K}&=E[-I\mathrm{e}^{-rt}]\\&=-\mathrm{e}^{-rt}E[I]\\&=-\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}),\end{aligned}$$

其中最后的等号用到引理 7.5.2. □

如前面所述，将$\frac{\partial C}{\partial s}$称为 delta.

**命题 7.5.2**

$$\frac{\partial C}{\partial s}=\Phi(\omega).$$

**证明**：利用等式(7-3)，我们有

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)=\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial s}=\frac{S(t)}{s}\mathrm{e}^{-rt}.$$

因此，由等式(7-5)得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial s}&=\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{s}E[IS(t)]\\&=\Phi(\omega),\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到引理 7.5.3. □

$C$ 关于 $r$ 的偏导数称为 rho. [111]

**命题 7.5.3**

$$\frac{\partial C}{\partial r}=Kt\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

**证明**：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)]&=-t\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)+\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial r}\\&=-t\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)+\mathrm{e}^{-rt}tS(t)\quad(\text{由式(7-3)})\\&=Kt\mathrm{e}^{-rt}.\end{aligned}$$

因此，由等式(7-5)和引理 7.5.2，有

$$\frac{\partial C}{\partial r} = Kt\mathrm{e}^{-rt}E[I] = Kt\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}).$$ □

为求其他偏导数，我们还需要另外一个引理，其证明与引理 7.5.3 的证明类似.

**引理 7.5.4** 设 $S(t)$ 由等式(7-3)给出，则

$$\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)Z] = s(\Phi'(\omega) + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega)).$$

**证明**：取 $c=\sigma\sqrt{t}-\omega$，由引理 7.5.1 有

$$\begin{aligned}
&E[IZS(t)] \\
&= \int_c^\infty xs\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t\}\int_c^\infty x\exp\{-(x^2-2\sigma\sqrt{t}x)/2\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\mathrm{e}^{rt}\int_c^\infty x\exp\{-(x-\sigma\sqrt{t})^2/2\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\mathrm{e}^{rt}\int_{-\omega}^\infty (y+\sigma\sqrt{t})\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y \quad (\text{令 } y = x-\sigma\sqrt{t}) \\
&= s\mathrm{e}^{rt}\left[\int_{-\omega}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y + \sigma\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^\infty \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\right] \\
&= s\mathrm{e}^{rt}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\omega^2/2} + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega)\right].
\end{aligned}$$ □

112

$C$ 关于 $\sigma$ 的偏导数称为 vega.

**命题 7.5.4**

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = s\sqrt{t}\Phi'(\omega).$$

**证明**：

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)] = \mathrm{e}^{-rt}S(t)(-t\sigma + \sqrt{t}Z).$$

因此，由等式(7-5)，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= E[\mathrm{e}^{-rt}IS(t)(-t\sigma+\sqrt{t}Z)] \\
&= -t\sigma\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)] + \sqrt{t}\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)Z] \\
&= -t\sigma s\Phi(\omega) + s\sqrt{t}(\Phi'(\omega) + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega)) \\
&= s\sqrt{t}\Phi'(\omega),
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号用到了引理 7.5.3 和引理 7.5.4. □

$C$ 关于 $t$ 的偏导数的负数称为 theta.

**命题 7.5.5**

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s\Phi'(\omega)+Kr\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

**证明：**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)]&=\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial t}-r\mathrm{e}^{-rt}S(t)+Kr\mathrm{e}^{-rt}\\&=\mathrm{e}^{-rt}S(t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}Z\right)-r\mathrm{e}^{-rt}S(t)+Kr\mathrm{e}^{-rt}\\&=\mathrm{e}^{-rt}S(t)\left(\frac{-\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}Z\right)+Kr\mathrm{e}^{-rt}.\end{aligned}$$

因而根据等式(7-5)有 [113]

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}&=-\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)]\frac{\sigma^2}{2}+\mathrm{e}^{-rt}E[IZS(t)]\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}+Kr\mathrm{e}^{-rt}E[I]\\&=-s\Phi(\omega)\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s(\Phi'(\omega)+\sigma\sqrt{t}\Phi(\omega))+Kr\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t})\\&=\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s\Phi'(\omega)+Kr\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).\end{aligned}$$

□

**注** 为了计算 vega 和 theta，我们用到 $\Phi'(x)$ 是标准正态分布密度函数，它由下式给出

$$\Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

下面的推论使用上述偏导数来对 7.2 节中的结果给出一个解析证明.

**推论 7.5.1** $C(s,t,K,\sigma,r)$

a)关于 $K$ 单调递减并且是凸的.

b)关于 $s$ 单调递增并且是凸的.

c)关于 $r$，$\sigma$，$t$ 单调递增，但关于它们既不是凸的也不是凹的.

**证明：** a)由命题 7.5.1，我们知道$\frac{\partial C}{\partial K}<0$，并且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}&=-\mathrm{e}^{-rt}\Phi'(\omega-\sigma\sqrt{t})\frac{\partial\omega}{\partial K}\\&=\mathrm{e}^{-rt}\Phi'(\omega-\sigma\sqrt{t})\frac{1}{K\sigma\sqrt{t}}\\&>0.\end{aligned}$$

b)由命题 7.5.2 有$\frac{\partial C}{\partial s}>0$，而且

$$\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = \Phi'(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial s} = \Phi'(\omega)\frac{1}{s\sigma\sqrt{t}} > 0. \tag{7-6}$$

[114]

c)由命题7.5.3、7.5.4和7.5.5，对于$x=r$，$\sigma$，$t$有

$$\frac{\partial C}{\partial x} > 0,$$

这就证明了单调性．由于$C$对$r$，$\sigma$，$t$的二阶导数都有可能是正或负的，所以$C$关于它们中任何一个变量既不是凸的也不是凹的．□

**注**　无论我们假设证券的价格演化过程服从什么样的模型，$C(s, t, K, \sigma, r)$关于$K$单调递减并且是凸的、关于$t$单调递增的结论永远是正确的．$C(s, t, K, \sigma, r)$关于$s$单调递增并且是凸的、关于$r$、$\sigma$单调递增的结论则要依赖于价格演化服从波动参数是$\sigma$的几何布朗运动的假设．$C$关于$s$的二阶导数称为gamma，它的值由等式(7-6)给出．

## 7.6　习题

除非特别说明，否则下面提到的单位时间都是一年．

**练习7.1**　如果股票的波动率是0.33，求下面两个变量的标准差．

a)$\log\left(\frac{S_d(n)}{S_d(n-1)}\right)$，

b)$\log\left(\frac{S_m(n)}{S_m(n-1)}\right)$，

其中$S_d(n)$和$S_m(n)$分别表示证券在第$n$天和第$n$个月结束时的价格．

**练习7.2**　某种证券的价格服从参数$\mu=0.12$和$\sigma=0.24$的几何布朗运动．如果该证券的当前价格是40，那么对于一个还有四个月才到期、执行价是$K=42$的买入期权，它会被执行的概率有多大？（如果标的证券的价格在买入期权到期日高于期权的执行价，那么就称该证券以实值结束．）

[115]

**练习7.3**　如果利率是8%，那么练习7.2中的买入期权的风险中性价值是多少？

**练习7.4**　证券的当前价格是105，那么一个执行价是100、六个月到期的欧式卖出期权的风险中性价值是多少？已知利率是10%，证券的波动率是0.30.

**练习7.5**　一个证券的价格服从漂移参数是0.06，波动参数是0.3的几何布朗运动．

a)六个月内证券的价格比它现在的价格低90%的概率有多大？

b)考虑一种新型的投资：初始成本为$A$，六个月后如果届时的价格低于初始

价格 90%就给你 100，否则就给你 0. 要使得这种投资不允许套利存在，$A$ 的值应该是多少？

**练习 7.6** 某种证券的价格服从漂移参数 $\mu=0.05$，波动参数 $\sigma=0.3$ 的几何布朗运动. 证券的当前价格是 95.

a)如果利率是4%，求一个三个月到期、执行价是100的买入期权的无套利价格.

b)a)中的买入期权到期日价值为 0 的概率是多少？

c)假设关于这种证券的一种新型投资正在交易. 如果购买这种投资后的六个月内证券的价格至少为105，并且购买一年后的价格至少和六个月时的价格一样多，那么这种投资在一年后的收益为50. 求这种投资的无套利价格.

**练习 7.7** 一个欧式的资产或无价值(asset-or-nothing)买入期权约定：如果在期权到期时证券的价格高于 $K$，就在到期日支付给它的持有者固定的数量 $F$，否则支付 0. 如果该证券的当前价格是 38，它的波动率是 0.32，利率是 6%，求这样一个买入期权的风险中性价值. 假设它在六个月后到期，并且 $F=100$，$K=40$.

**练习 7.8** 如果几何布朗运动的漂移参数是 0，求练习 7.7 中资产或无价值(asset-or-nothing)买入期权支付的期望值. 116

**练习 7.9** 为了决定一个欧式买入期权以实值结束的概率(见练习 7.2)，知道 $K$，$S(0)$，$r$，$t$，$\sigma$ 这五个参数就足够了吗？请对你的答案加以说明. 如果答案是"否"，那么还需要知道其他什么条件呢？

**练习 7.10** 如果一个买入期权的执行价是 0，那么这个买入期权的价格应该是多少？

**练习 7.11** 当一个买入期权的到期日越来越长时，它的价格会如何变化？解释你的理由(或者用数学证明).

**练习 7.12** 当波动率越来越小时，一个$(K, t)$买入期权的价格应该怎样变化？

## 参考文献

在[1]中，Black-Scholes 公式是通过解随机微分方程的方法推导出来的. 通过多时期二项模型来近似几何布朗运动，从而获得该公式的思想出自于[2]. 文献[3]、[4]、[5]都是关于期权问题比较流行的教材，但阅读它们需要比阅读本教材具备更高深的数学知识.

[1] Black, F., and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81: 637-59.

[2] Cox, J., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics* 7: 229-64.

[3] Cox, J., and M. Rubinstein (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[4] Hull, J. (1997). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[5] Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Oxford: Oxford University Press. 117





# 第 8 章　关于期权的其他结果

## 8.1　引言

本章讨论基本买入期权模型的一些延伸. 在 8.2 节中考虑分红证券的欧式买入期权，我们将对三种不同的分红情形进行讨论. 8.2.1 节假设证券的红利是连续支付的，其支付率等于标的证券价格的某个固定比率. 8.2.2 节和 8.2.3 节假设只在特定的时间分红，支付的数量等于证券价格的固定比率(8.2.2 节)或者是一个固定的数量(8.2.3 节). 8.3 节说明如何确定一个美式卖出期权的无套利价格. 在 8.4 节中我们将介绍一种允许证券的价格有跳跃的模型. 此模型假定证券价格除了在一个随机时间会变化为原来价格的一个随机倍数外，其他时间的价格变化都符合几何布朗运动. 在 8.4.1 节中，我们推导出当跳跃倍数服从对数正态概率分布时买入期权无套利价格的确切公式. 8.4.2 节中假设跳跃倍数的概率分布是任意的，然后证明它的无套利价格至少和没有跳跃时 Black-Scholes 公式所确定的价格一样，并给出了该无套利价格的近似值. 8.5 节描述了估计波动参数的几种不同方法. 8.6 节是关于本章和前面章节中一些结果的评论.

## 8.2　分红证券的买入期权

本节讨论标的证券有分红时，如何确定它的欧式买入期权的无套利价格. 下面我们考虑三种不同的红利支付方式.

118

### 8.2.1　证券每股红利以证券价格的固定比率 $f$ 连续支付

举个例子，假如股票当前价格是 $s$，那么当 $dt$ 很小时，在其后 $dt$ 个时间单位内每一股股票应得的红利近似为 $fsdt$.

首先，我们需要构建证券价格随时间变化的模型. 为了得到一个可行的模型，一个方法就是假设所有的红利都被再投资于购买标的股票. 这样，我们的股票数量将以连续复合比率 $f$ 增长. 因此，如果在 0 时刻购买了一股股票，那么在时刻 $t$ 就会有 $e^{ft}$ 股该股票，它的总市场价值为

$$M(t) = e^{ft}S(t).$$

假设 $M(t)$ 服从某个波动率为 $\sigma$ 的几何布朗运动是合理的. 因此关于 $M(t)$ 的风险中性概率就是波动参数为 $\sigma$，漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 的几何布朗运动的风险中性概率. 此时为了不存在套利，所有的期权都应该按照下述假设定价以使关于它们的买卖成为公平赌博：$e^{fy}S(y)(y\geqslant 0)$是这样的一个风险中性几何布朗运动.

考虑一个欧式买入期权：它允许持有者在时刻 $t$ 以价格 $K$ 买入上述证券. 在关于 $M(t)$ 的风险中性概率下，我们有

$$\frac{S(t)}{S(0)}=\frac{e^{-ft}M(t)}{M(0)}=e^{-ft}e^{W},$$

其中 $W$ 是一个期望为$(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量．因此，还有

$$S(t)=S(0)e^{-ft}e^{W}.$$

根据套利定理我们知道，如果 $S(0)=s$，那么就有

$$\begin{aligned}(K,t)\text{ 期权的无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t)-K)^+]\\ &= e^{-rt}E[(se^{-ft}e^{W}-K)^+]\\ &= C(se^{-ft},t,K,\sigma,r),\end{aligned}$$

[119]

其中 $C(s,\ t,\ K,\ \sigma,\ r)$是 Black-Scholes 公式所给的价格．这就是说，当初始价格是 $s$ 时，欧式$(K,\ t)$买入期权的无套利价格恰恰就是没有分红时初始价格为 $se^{-ft}$ 的标的证券的期权价格．

### 8.2.2 每股证券在时刻 $t_d$ 单次分红 $fS(t_d)$

通常我们假设在支付红利时，股票价格瞬间下跌的数量等于所付红利．（假如股票价格下跌量比支付的红利少，那么在分红前一瞬间买入该股票并在红利支付后立刻将其卖出就可以获得套利机会；所以，股票价格下跌的数量至少要和分的红利一样多；通常和实际数据相一致的假设是，价格下跌的幅度刚好等于所支付的红利．）由于支付红利时股票价格会向下跳跃，所以不能用几何布朗运动来模拟证券的价格变化（几何布朗运动没有不连续点）．但是，如果假设在时刻 $t_d$ 分红所得的钱都被用来购买更多的股份，那么仍可以用几何布朗运动来模拟股票的市场价值．由于红利支付后短期内每股股票的价格是 $S(t_d)-fS(t_d)=(1-f)S(t_d)$，每股所得的红利 $fS(t_d)$可以购买额外的 $f/(1-f)$股该证券．因此，若初始时刻 0 有一股股票，那么我们的投资组合在时刻 $y$ 的市场价值（记为 $M(y)$）是

$$M(y)=\begin{cases}S(y) & \text{若 } y<t_d,\\ \dfrac{1}{1-f}S(y) & \text{若 } y\geqslant t_d.\end{cases}$$

假设我们的模型 $M(y)(y\geqslant 0)$是一个波动参数为 $\sigma$ 的几何布朗运动．这个过程的风险中性概率就是波动参数为 $\sigma$、漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 的几何布朗运动的概率．对于 $y<t_d$，有 $M(y)=S(y)$；所以，当 $t<t_d$ 时，关于该证券的一个$(K,\ t)$期权的唯一无套利价格就是通常 Black-Scholes 公式所给的价格．对于 $t>t_d$，我们注意到

[120]

$$\frac{S(t)}{S(0)}=(1-f)\frac{M(t)}{M(0)},\quad t>t_d.$$

因此在风险中性概率下有

$$\frac{1}{1-f}\frac{S(t)}{S(0)}=\frac{M(t)}{M(0)}=e^{W},\quad t>t_d,$$

其中 $W$ 是期望为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 同样还有

$$S(t)=(1-f)S(0)e^W, \quad t>t_d.$$

当 $t>t_d$ 时，如果证券的初始价格是 $s$，根据套利定理可知，一个 $(K,t)$ 欧式买入期权唯一的无套利价格，恰恰就是初始价格为 $s(1-f)$ 的没有分红时证券的期权价格. 即，对于 $t>t_d$，

$$\begin{aligned}(K,t)\text{ 期权的无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t)-K)^+]\\ &= e^{-rt}E[(s(1-f)e^W-K)^+]\\ &= C(s(1-f),t,K,\sigma,r),\end{aligned}$$

其中 $C(s,t,K,\sigma,r)$ 是 Black-Scholes 公式所给价格.

### 8.2.3 每股证券在时刻 $t_d$ 以固定数量 $D$ 分红

与前面一样，我们要先确定证券价格变化过程 $S(y)(y\geqslant 0)$ 的合理模型. 首先，为确定在时刻 $t_d$ 支付给股东固定数量 $D$ 的红利，在时刻 $y<t_d$，证券的价格必须至少为 $De^{-r(t_d-y)}$. 这是因为，对于某些 $y<t_d$ 有 $S(y)<De^{-r(t_d-y)}$，如果在时刻 $y$ 贷款 $S(y)$，并用这笔钱去购买该证券，而且一直持有这些证券直到时刻 $t_d$，那么收到红利后我们立刻就可以归还贷款，这样就出现了一个套利机会. 因此，我们不能用几何布朗运动来模拟 $S(y)(0\leqslant y\leqslant t_d)$.

为模拟时刻 $t_d$ 之前的价格变化，最好把证券的价格拆成两个部分，其中一部分是无风险的，它是在时刻 $t_d$ 所支付的固定红利. 即令

$$S^*(y)=S(y)-De^{-r(t_d-y)}, \quad y<t_d,$$

121

所以

$$S(y)=De^{-r(t_d-y)}+S^*(y), \quad y<t_d.$$

这样把 $S^*(y)$，$y<t_d$ 模拟为一个具有波动参数 $\sigma$ 的几何布朗运动就是合理的. 由于证券价格的无风险部分是按比率 $r$ 增加的，从直观上看，当 $S^*(y)$，$y<t_d$ 的漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 时，我们就得到了风险中性概率. 要验证关于漂移参数的这个假设能使所有的赌博都公平，只需要注意到在此假设下，在 0 时刻买入证券并在时刻 $t<t_d$ 将其卖出，如此所得的期望回报现值为

$$\begin{aligned}e^{-rt}E[S(t)] &= e^{-rt}De^{-r(t_d-t)}+e^{-rt}E[S^*(t)]\\ &= De^{-rt_d}+S^*(0)\\ &= S(0).\end{aligned}$$

假设我们现在要寻找证券初始价格是 $s$ 时，一个执行价为 $K$，到期日为 $t<t_d$ 的欧式买入期权的无套利价格. 如果 $K<De^{-r(t_d-t)}$，那么期权将肯定会被执行(因为 $S(t)\geqslant De^{-r(t_d-t)}$). 那么，此时购买期权就等价于购买证券. 根据一价律，期权的价值加上执行价的当前价值必须等于证券的价值. 也就是说，如果 $t<t_d$ 并

且 $K < De^{-r(t_d - t)}$，那么就有

$$\text{期权的无套利价格} = s - Ke^{-rt}.$$

如果假设期权在时间 $t < t_d$ 到期，并且它的执行价 $K$ 满足 $K \geqslant De^{-r(t_d - t)}$. 由于 $S^*(y)$ 是几何布朗运动，我们就可以使用风险中性表达式

$$S^*(t) = S^*(0)e^W = (s - De^{-rt_d})e^W,$$

其中 $W$ 是一个均值为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 由套利定理知

$$\begin{aligned}\text{期权无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t) - K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(S^*(t) + De^{-r(t_d - t)} - K)^+] \\ &= e^{-rt}E[((s - De^{-rt_d})e^W - (K - De^{-r(t_d - t)}))^+] \\ &= C(s - De^{-rt_d}, t, K - De^{-r(t_d - t)}, \sigma, r).\end{aligned}$$

122

这就是说，如果分红在期权到期后进行，那么该期权的无套利价格就等于证券初始价格为 $s - De^{-rt_d}$ 时，根据 Black-Scholes 期权定价公式计算出的执行价为 $K - De^{-r(t_d - t)}$ 的买入期权价格.

现在考虑一个欧式买入期权，它的执行价是 $K$，到期日是 $t > t_d$. 同样假设证券的初始价格是 $s$. 由于在时刻 $t_d$ 证券的价格会立刻下跌 $D$（分红数量），我们有

$$S(t) = S^*(t), \quad t \geqslant t_d.$$

因而，如果假设在时间 $t_d$ 后几何布朗运动 $S^*(y)$ 的波动率保持不变，1($K$，$t$)买入期权的风险中性价格将是

$$\begin{aligned}e^{-rt}E[(S(t) - K)^+] &= e^{-rt}E[(S^*(t) - K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(S^*(0)e^W - K)^+] \\ &= e^{-rt}E[((s - De^{-rt_d})e^W - K)^+].\end{aligned}$$

由于上面等式的右边等于证券初始价格为 $s - De^{-rt_d}$，执行价是 $K$，到期日是 $t$ 的买入期权的 Black-Scholes 价格，所以

$$\text{期权的风险中性价格} = C(s - De^{-rt_d}, t, K, \sigma, r).$$

换句话说，如果标的证券在期权有效期内支付红利，那么这个期权的无套利价格就可以由 Black-Scholes 公式得到，不同之处是将证券的初始价格减去红利的现值.

## 8.3 美式卖出期权的定价

要确定欧式卖出期权的风险中性价格很容易. 根据买入-卖出期权平价公式有

$$P(s, t, K, \sigma, r) = C(s, t, K, \sigma, r) + Ke^{-rt} - s,$$

其中 $P(s, t, K, \sigma, r)$ 是时刻 $t$ 到期，执行价为 $K$ 的欧式卖出期权的风险中性

123

价格，这里假定证券在0时刻的价格是 $s$，波动率是 $\sigma$，利率是 $r$，那么 $C(s, t, K, \sigma, r)$ 是相应的买入期权的风险中性价格．不过，由于有时可以从提前执行期权中获益，美式卖出期权的风险中性价格就不能这么直接得到．下面我们将使用一种比较有效的方法来估计该价格较精确的近似值．

一个美式卖出期权的风险中性价格等于在下面假设下的期权期望现值：期权的标的证券价格变化服从风险中性几何布朗运动，并且其持有者可使用最优策略来决定何时执行．为近似该期权的价格，我们用下面多时期二项模型来近似风险中性几何布朗运动．任选一个整数 $n$，设 $t$ 为期权的到期日，令 $t_k = kt/n$ $(k=0, 1, \cdots, n)$．假设：

1）期权只能在时刻 $t_k(k=0, 1, \cdots, n)$ 其中之一时进行交割；

2）如果 $S(t_k)$ 是时刻 $t_k$ 的证券价格，那么

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} uS(t_k) & \text{以概率 } p, \\ dS(t_k) & \text{以概率 } 1-p, \end{cases}$$

其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}},$$
$$p = \frac{1 + rt/n - d}{u - d}.$$

该过程最初两个可能的价格变化情况如图8-1所示．

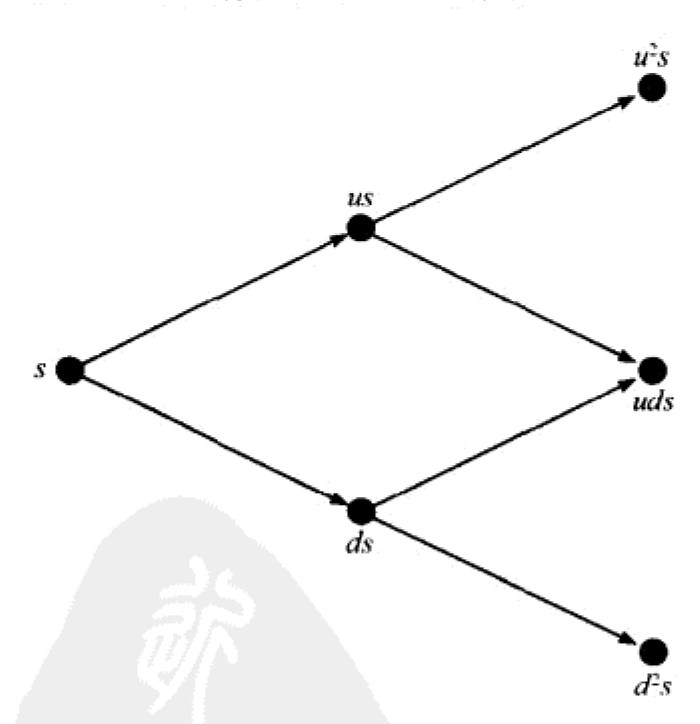



图8-1 离散近似模型的可能价格

由7.1节我们知道，当 $n$ 越来越大时，上面的离散价格过程近似一个风险中性几何布朗运动过程；此外，可以证明在几何布朗运动下价格曲线是连续的，所以直观上看（也可以严格证明）：当 $n$ 越来越大时，因只允许期权在时刻 $t_k$ 交割所产生的损失的期望值将会趋于0．所以，只要选择足够大的 $n$ 值，在条件1）、2）

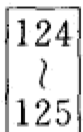
以及使用最优策略来决定期权执行时间的假设下，一个美式期权的风险中性价格就可以用该期权的期望回报现值来近似. 下面我们来看如何确定这个期望回报现值.

首先注意，如果在前 $k$ 个价格变化中有 $i$ 次上升及 $k$-$i$ 次下降，那么在时刻 $t_k$ 证券的价格是

$$S(t_k) = u^i d^{k-i} s.$$

由于 $i$ 的值必须是 0，1，…，$k$ 中的一个，则在时刻 $t_k$ 证券的价格就有 $k+1$ 种可能性. 现在假设在时刻 $t_k$ 证券的价格是 $S(t_k)=u^i d^{k-i} s$，并且在该时刻之后将有一最优策略，令 $V_k(i)$表示在时刻 $t_k$ 此卖出期权的期望回报现值.

为决定此卖出期权产生的期望回报现值 $V_0(0)$，我们从后往前递推. 即先决定 $i$ 有 $n+1$ 种可能值时，其相对应的 $V_n(i)$值；再决定 $i$ 有 $n$ 种可能值时，其相对应的 $V_{n-1}(i)$的值；然后是 $i$ 有 $n-1$ 种可能值时，其相对应的 $V_{n-2}(i)$的值. 要完成这项工作，首先注意到，期权是在时刻 $t_n$ 执行，所以有



$$V_n(i) = \max(K - u^i d^{n-i} s, 0), \tag{8-0}$$

这个等式决定了每一个 $V_n(i)$，$i=0$，…，$n$ 的值. 令

$$\beta = e^{-rt/n};$$

假设我们现在处于时刻 $t_k$，期权还没被执行且股票的价格是 $u^i d^{k-i} s$. 如果此时执行期权，就可以得到 $K-u^i d^{k-i} s$. 反之，股票在时刻 $t_{k+1}$ 的价格将会以概率 $p$ 等于 $u^{i+1} d^{k-i} s$，或者以概率 $1-p$ 等于 $u^i d^{k-i+1} s$. 如果是 $u^{i+1} d^{k-i} s$ 并且从那时起使用一个最优策略，那么在时刻 $t_k$ 这个卖出期权的期望收益是 $\beta V_{k+1}(i+1)$；类似地，如果价格下降，期望收益将会是 $\beta V_{k+1}(i)$. 由于证券的价格将会以概率 $p$ 上升或者以概率 $1-p$ 下降，所以如果我们在时刻 $t_k$ 不执行期权而是继续使用最优策略，则在时刻 $t_k$ 的期望收益是

$$p\beta V_{k+1}(i+1) + (1-p)\beta V_{k+1}(i).$$

因为执行期权获得的收益是 $K-u^i d^{k-i} s$，而如果不执行，上面的结果就是最大的期望收益，所以可能获得的最大期望收益就是这两者之中较大的一个. 也就是说，对于 $k=0$，…，$n-1$，

$$V_k(i) = \max(K - u^i d^{k-i} s, \beta p V_{k+1}(i+1) + \beta(1-p) V_{k+1}(i)),$$
$$i = 0, \cdots, k. \tag{8-1}$$

为求近似值，我们首先利用公式(8-0)来决定 $V_n(i)$的值；再在公式(8-1)中取 $k=n-1$ 就得到 $V_{n-1}(i)$的值；然后在公式(8-1)中令 $k=n-2$ 得到 $V_{n-2}(i)$的值；如此下去直到得到想要的 $V_0(0)$值，它就是这个美式卖出期权风险中性价格的近似值. 尽管这个过程用手工计算很繁杂，但若编程计算却比较容易.

**注** 1)注意到 $ud=1$ 并利用下面可证明的结果，就可以简化上面的计算过程.

a)若在时刻 $t_k$ 证券价格是 $x$ 时卖出期权价值为零，那么当证券价格高于 $x$ 时，时刻 $t_k$ 的期权价值也为零. 即

$$V_k(i) = 0 \Rightarrow V_k(j) = 0, \quad 若\ j > i.$$

126

b)若最优选择是在时刻 $t_k$ 证券价格为 $x$ 时执行该期权，那么在时刻 $t_k$，如果证券价格低于 $x$，执行该期权同样是最优的. 亦即

$$V_k(i) = K - u^i d^{k-i} s \Rightarrow V_k(j) = K - u^j d^{k-j} s, \quad 若\ j < i.$$

2)虽然定义 $\beta$ 为 $e^{-rt/n}$，实际上也可将它定义为 $\frac{1}{1+rt/n}$.

3)我们在决定 $V_k(i)$ 值时所用的方法称为动态规划法. 在后面第 10 章处理金融中的最优化模型时还会用到它.

**例 8.3a** 假设要定价一个具有如下参数的美式卖出期权：

$$s = 9, \quad t = 0.25, \quad K = 10, \quad \sigma = 0.3, \quad r = 0.06.$$

为了说明上述过程，假设我们取 $n=5$(要得到一个精确的近似值，这个 $n$ 值显然太小). 利用上面的参数，我们有

$$\begin{aligned} u &= e^{0.3\sqrt{0.05}} = 1.069\,4, \\ d &= e^{-0.3\sqrt{0.05}} = 0.935\,1, \\ p &= 0.505\,6, \\ 1-p &= 0.494\,4, \\ \beta &= e^{-rt/n} = 0.997. \end{aligned}$$

在时刻 $t_5$ 该证券所有可能的价格是

$$\begin{aligned} 9d^5 &= 6.435, \\ 9ud^4 &= 7.359, \\ 9u^2d^3 &= 8.416, \\ 9u^3d^2 &= 9.625, \\ 9u^id^{5-i} &> 10 \quad (i = 4,5). \end{aligned}$$

因此，

127

$$\begin{aligned} V_5(0) &= 3.565, \\ V_5(1) &= 2.641, \\ V_5(2) &= 1.584, \\ V_5(3) &= 0.375, \\ V_5(i) &= 0 \quad (i = 4,5). \end{aligned}$$

因为 $9u^2d^2=9$，等式(8-1)给出了

$$V_4(2) = \max(1, \beta p V_5(3) + \beta(1-p)V_5(2)) = 1,$$

这个式子说明在时刻 $t_4$ 如果证券的价格是 9，那么执行该期权是最优的. 从注 1) b)知，如果该时刻证券价格低于 9，也应该执行期权. 我们还有

$$V_4(1) = 10 - 9ud^3 = 2.130$$

以及

$$V_4(0) = 10 - 9d^4 = 3.119.$$

当 $9u^3d = 10.293$ 时，由等式(8-1)有

$$V_4(3) = \beta p V_5(4) + \beta(1-p)V_5(3) = 0.181.$$

类似地

$$V_4(4) = \beta p V_5(5) + \beta(1-p)V_5(4) = 0.$$

继续下去，我们得到

$$V_3(0) = \max(2.641, \beta p V_4(1) + \beta(1-p)V_4(0)) = 2.641,$$
$$V_3(1) = \max(1.584, \beta p V_4(2) + \beta(1-p)V_4(1)) = 1.584,$$
$$V_3(2) = \max(0.375, \beta p V_4(3) + \beta(1-p)V_4(2)) = 0.584,$$
$$V_3(3) = \beta p V_4(4) + \beta(1-p)V_4(3) = 0.089.$$

类似地

$$V_2(0) = \max(2.130, \beta p V_3(1) + \beta(1-p)V_3(0)) = 2.130,$$
$$V_2(1) = \max(1, \beta p V_3(2) + \beta(1-p)V_3(1)) = 1.075,$$

128

$$V_2(2) = \beta p V_3(3) + \beta(1-p)V_3(2) = 0.333,$$

以及

$$V_1(0) = \max(1.584, \beta p V_2(1) + \beta(1-p)V_2(0)) = 1.592,$$
$$V_1(1) = \max(0.375, \beta p V_2(2) + \beta(1-p)V_2(1)) = 0.698,$$

由上面最后两个式子，就可以得到所求的结果.

$$V_0(0) = \max(1, \beta p V_1(1) + \beta(1-p)V_1(0)) = 1.137.$$

即，卖出期权的风险中性价格近似为 1.137.（精确到千分位时的确切结果是 1.126. 它表明即使我们所使用的 $n$ 比较小也能获得很满意的近似.） □

## 8.4 在几何布朗运动中加入跳跃

用几何布朗运动作为证券价格随时间演化的模型有一个缺点，就是它不允许价格有向上或者向下的不连续跳跃存在.（在几何布朗运动模型下，从理论上讲，价格有一个跳跃的概率等于 0.）然而这样的跳跃在实际中又确实存在，所以考虑在几何布朗运动中加入一些随机的跳跃，以之作为新的价格模型可能会更有益. 下面我们就来考虑这样的模型.

首先，我们考虑发生跳跃的时间. 假设对于某个正数 $\lambda$，当 $h$ 足够小时，在

任何长度为 $h$ 的时间区间内发生一次跳跃的概率近似地等于 $\lambda h$. 而且，我们假定这个概率不随先前跳跃的任何信息而变化. 如果令 $N(t)$ 表示时刻 $t$ 之前发生过的跳跃次数，那么按前面的假设，$N(t)$，$t\geqslant 0$，就称为泊松过程，它可以表示为

$$P\{N(t)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad n=0,1,\cdots.$$

我们还假设，当第 $i$ 次跳跃发生时证券的价格变为原来的价格乘上 $J_i$，其中 $J_1$，$J_2$，…是独立且具有共同指定概率分布的随机变量. 此外，假设这个序列与跳跃发生的时间是相互独立的. 129

为完成对证券价格演化过程的描述，令 $S(t)$ 表示该证券在时刻 $t$ 的价格，并且假设

$$S(t)=S^*(t)\prod_{i=1}^{N(t)}J_i,\quad t\geqslant 0,$$

其中 $S^*(t)$，$t\geqslant 0$ 是一个波动参数为 $\sigma$、漂移参数为 $\mu$ 的几何布朗运动，它和 $J_i$ 以及跳跃所发生的时间都是相互独立的. 当 $N(t)=0$ 时，其中的 $\prod_{i=1}^{N(t)}J_i$ 就定义为 1.

为找到这个价格变化过程的风险中性概率，令

$$J(t)=\prod_{i=1}^{N(t)}J_i.$$

在 8.7 节中将证明

$$E[J(t)]=\mathrm{e}^{-\lambda t(1-E[J])},\tag{8-2}$$

其中 $E[J]=E[J_i]$是跳跃大小的期望值. 由于 $S^*(t)$，$t\geqslant 0$ 是一个参数为 $\sigma$ 和 $\mu$ 的几何布朗运动，故我们有

$$E[S^*(t)]=S^*(0)\mathrm{e}^{(\mu+\sigma^2/2)t}.$$

因此

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=E[S^*(t)J(t)]\\&=E[S^*(t)]E[J(t)]\quad(\text{由独立性})\\&=S^*(0)\mathrm{e}^{(\mu+\sigma^2/2-\lambda(1-E[J]))t}.\end{aligned}$$

如果有

$$\mu+\sigma^2/2-\lambda(1-E[J])=r.$$

那么购买证券的赌博将是公平赌博(即，$E[S(t)]=S(0)\mathrm{e}^{rt}$). 也就是说，当几何布朗运动 $S^*(t)$，$t\geqslant 0$ 的漂移参数 $\mu$ 由下式给出时

$$\mu=r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J].$$

130

就可以得到证券价格过程的风险中性概率. 根据套利定理，如果所有的期权相对

前面这个风险中性概率都被公平定价，那么套利就不可能存在. 例如，一个在时刻 $t$ 到期，执行价是 $K$ 的欧式买入期权的无套利价格可由下式给出

$$
\begin{aligned}
\text{无套利价格} &= E[e^{-rt}(S(t)-K)^+] \\
&= e^{-rt}E[(J(t)S^*(t)-K)^+] \\
&= e^{-rt}E[(J(t)se^W-K)^+],
\end{aligned}
\tag{8-3}
$$

其中 $s=S^*(0)$是证券的初始价格，$W$ 是一个均值为$(r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量.

在 8.4.1 节我们将估计 $J_i$ 为对数正态随机变量时等式(8-3)的值，在后面的 8.4.2 节中将会推导出跳跃大小具有一般分布时的近似值. 和往常一样，$C(s, t, K, \sigma, r)$是 Black-Scholes 公式导出的价格.

### 8.4.1 对数正态跳跃分布

如果跃度 $J_i$ 服从均值是 $\mu_0$ 方差是 $\sigma_0^2$ 的对数正态分布，那么

$$E[J] = \exp\{\mu_0 + \sigma_0^2/2\}.$$

令

$$X_i = \log(J_i), \quad i \geqslant 1,$$

那么 $X_i$ 就是均值为 $\mu_0$、方差为 $\sigma_0^2$ 的相互独立的正态随机变量. 而且，

$$J(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} J_i = \prod_{i=1}^{N(t)} e^{X_i} = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big\}.$$

因此，利用等式(8-3)，可得一个在时刻 $t$ 到期，执行价是 $K$ 的欧式买入期权的无套利价格为

$$\text{无套利价格} = e^{-rt}E\Big[\Big(s\exp\Big\{W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\Big\}-K\Big)^+\Big], \tag{8-4}$$

其中 $s$ 是证券的初始价格. 现在假设在时刻 $t$ 之前总共有 $n$ 次跳跃. 即，假设我们

[131] 知道 $N(t)=n$. 那么，$W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ 是一个正态随机变量，它的均值和方差由下式给出

$$E\Big[W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i \mid N(t)=n\Big] = (r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t + n\mu_0,$$

$$\mathrm{Var}\Big(W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i \mid N(t)=n\Big) = t\sigma^2 + n\sigma_0^2.$$

如果设

$$\sigma^2(n) = \sigma^2 + n\sigma_0^2/t$$

且令

$$r(n) = r - \sigma^2/2 + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n\mu_0}{t} + \sigma^2(n)/2$$

$$= r + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n}{t}(\mu_0 + \sigma_0^2/2)$$

$$= r + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n}{t}\log(E[J]), \tag{8-5}$$

那么当 $N(t)=n$ 时，$W+\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 是一个方差为 $t\sigma^2(n)$、均值是 $(r(n)-\sigma^2(n)/2)t$ 的正态随机变量. 但这意味着，当 $N(t)=n$ 时

$$e^{-r(n)t}E\left[\left(s\exp\left\{W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right\}-K\right)^+ \mid N(t)=n\right]$$

$$=C(s,t,K,\sigma(n),r(n)).$$

把上面等式左右两边同时乘以 $e^{(r(n)-r)t}$，有

$$e^{-rt}E\left[\left(s\exp\left\{W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right\}-K\right)^+ \mid N(t)=n\right]$$

$$=e^{(r(n)-r)t}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)).$$

等式(8-4)表明，如果已知时刻 $t$ 之前有 $n$ 次跳跃，那么上面的表达式就是我们想要的期望值. 因而无条件期望值应该等于这些量的加权平均(可以证明这是正确的)，其中的权重等于事件 $N(t)=n$ 的概率. 即 [132]

$$\text{无套利价格} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{(r(n)-r)t}C(s,t,K,\sigma(n),r(n))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t E[J]}(E[J])^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t E[J]}\frac{(\lambda t E[J])^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)). \text{(由式(8-5))}$$

综上所述，我们证明了下面的定理.

**定理 8.4.1** 如果所有跳跃都服从均值参数为 $\mu_0$、方差参数为 $\sigma_0^2$ 的对数正态分布，那么一个到期日是 $t$，执行价是 $K$ 的欧式买入期权的无套利价格由下式给出

$$\text{无套利价格} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t E[J]}\frac{(\lambda t E[J])^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)),$$

其中

$$\sigma^2(n) = \sigma^2 + n\sigma_0^2/t,$$

$$r(n) = r + \lambda(1-E[J]) + \frac{n}{t}\log(E[J]),$$

且

$$E[J]=\exp\{\mu_0+\sigma_0^2/2\}.$$

**注** 尽管定理8.4.1涉及到一个无穷级数，但是在大多数应用中，由于 $\lambda$(跳跃发生率)比较小，因而该级数收敛也较快.

### 8.4.2 一般跳跃分布

我们从等式(8-3)开始，这个等式表明，一个到期日是 $t$，执行价是 $K$ 的欧式买入期权的无套利价格为：

133

$$\text{无套利价格} = e^{-rt}E[(J(t)se^{W}-K)^{+}],$$

其中 $s$ 是证券在0时刻的价格，$W$ 是一个均值为 $(r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t$，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 如果令

$$W^{*} = W-\lambda t(1-E[J])$$

以及

$$s_t = s\,e^{\lambda t(1-E[J])} = \frac{s}{E[J(t)]},$$

那么

$$\text{无套利价格} = E[e^{-rt}(s_tJ(t)e^{W^{*}}-K)^{+}].$$

因为 $W^{*}$ 是一个均值为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差是 $t\sigma^2$ 的正态随机变量，所以有

$$\text{无套利价格} = E[C(s_tJ(t),t,K,\sigma,r)]. \tag{8-6}$$

由于 $C(s, t, K, \sigma, r)$ 关于 $s$ 为凸函数，根据已知的詹森(Jensen)不等式(参看9.2节)得到

$$E[C(s_tJ(t),t,K,\sigma,r)] \geqslant C(E[s_tJ(t)],t,K,\sigma,r) = C(s,t,K,\sigma,r),$$

这表明跳跃模型中的无套利价格，不会比同样模型无跳跃时的价格低.（事实上，如果有 $P\{J_i=1\}\neq 1$，那么在跳跃模型中的价格会绝对地大.）

利用下面的方法我们可以得到此无套利价格的近似值. 首先把 $C(x)=C(x, t, K, \sigma, r)$ 只看作是 $x$ 的函数(其他变量保持不变)，把它在某个点 $x_0$ 按泰勒级数展开，然后忽略不计第三项以后的全部项得到

$$C(x)\approx C(x_0)+C'(x_0)(x-x_0)+C''(x_0)(x-x_0)^2/2.$$

因此，对于任何非负的随机变量 $X$，我们有

$$C(X)\approx C(x_0)+C'(x_0)(X-x_0)+C''(x_0)(X-x_0)^2/2.$$

令 $x_0=E[X]$ 并对上式左右两边同时取期望得到

$$E[C(X)]\approx C(E[X])+C''(E[X])\mathrm{Var}(X)/2.$$

134

令

$$X = s_t J(t), \quad E[X] = s$$

则

$$E[C(s_t J(t))] \approx C(s) + C''(s) s_t^2 \mathrm{Var}(J(t))/2.$$

可以证明(见 8.7 节)

$$\mathrm{Var}(J(t)) = e^{-\lambda t(1-E[J^2])} - e^{-2\lambda t(1-E[J])}, \tag{8-7}$$

其中 $J$ 的概率分布和 $J_i$ 相同. 因此，利用 7.5 节所推导出的关于 $C''(s)$的公式(该公式在那里被称为 gamma)，可以得到如下定理中给出的近似值，此定理是本小节所有结果的综合.

**定理 8.4.2** 假设跳跃的大小服从一般的分布，那么

$$\begin{aligned}\text{期权的无套利价格} &= E[C(s_t J(t), t, K, \sigma, r)] \\ &\geq C(s, t, K, \sigma, r).\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}&\text{期权的无套利价格}\\ &\approx C(s,t,K,\sigma,r) + s_t^2[e^{-\lambda t(1-E[J^2])} - e^{-2\lambda t(1-E[J])}]\frac{1}{2s\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\omega^2/2}\\ &= C(s,t,K,\sigma,r) + s^2(e^{\lambda t(1-2E[J]+E[J^2])} - 1)\frac{1}{2s\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\omega^2/2},\end{aligned}$$

其中

$$s_t = s e^{\lambda t(1-E[J])}$$

而

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \log(K/s)}{\sigma\sqrt{t}}.$$

## 8.5 估计波动参数

在运用 Black-Scholes 公式时，所需五个参数中的四个，即 $s$，$t$，$K$ 和 $r$ 都是已知的量，而 $\sigma$ 的值则需要进行估计. 其中一种方法就是使用历史数据. 8.5.1 节给出了估计一个总体方差的标准方法；8.5.2 节是根据连续一段时间内证券的收盘价，应用前面的标准方法得出 $\sigma$ 的一个估计量；8.5.3 节基于每日的收盘价和开盘价这两个价格给出了一个改进的估计量；8.5.4 节则给出了一个更为复杂的估计量，它用到了每日的最高价和最低价以及每日的开盘价和收盘价. 135

### 8.5.1 估计总体的均值和方差

假设 $X_1$，…，$X_n$ 是相互独立的随机变量，它们有相同的概率分布，均值是

$\mu_0$、方差是 $\sigma_0^2$. 这些数据的平均值

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},$$

是期望的估计值. 由于

$$\sigma_0^2=\mathrm{Var}(X_i)=E[(X_i-\mu_0)^2],$$

那么 $\sigma_0^2$ 就可以由下式来估计

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{n}.$$

然而，当均值 $\mu_0$ 未知时这个估计量不能直接应用. 为了能用它，首先把未知的 $\mu_0$ 代换成它的估计量 $\overline{X}$. 再用 $n-1$ 代替 $n$，就得到了样本方差 $S^2$，其定义为

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}.$$

样本方差就是方差 $\sigma_0^2$ 的标准估计量，并且它是 $\sigma_0^2$ 的一个无偏估计量，即

$$E[S^2]=\sigma_0^2.$$

(把分母从 $n$ 变为 $n-1$ 是为了得到无偏估计量.)把 $S^2$ 作为方差估计量的有效性可以用均方误差(MSE)来衡量，它的定义是

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}&=E[(S^2-\sigma_0^2)^2]\\&=\mathrm{Var}(S^2).\end{aligned}$$

136

当 $X_i$ 来自一个正态分布时，可以证明

$$\mathrm{Var}(S^2)=\frac{2\sigma_0^4}{n-1}. \tag{8-8}$$

### 8.5.2 波动率的标准估计量

如果想用 $t$ 个单位时间的历史数据来估计 $\sigma$，不妨设是从 0 时刻到 $t$ 时刻. 也就是说，现在的时间是 $t$，历史的价格数据是 $S(y)$，$0\leqslant y\leqslant t$. 固定一个正整数 $n$，令 $l=t/n$ 并定义随机变量

$$X_1=\log\left(\frac{S(l)}{S(0)}\right),$$

$$X_2=\log\left(\frac{S(2l)}{S(l)}\right),$$

$$X_3=\log\left(\frac{S(3l)}{S(2l)}\right),$$

$$\vdots$$

$$X_n = \log\left(\frac{S(nl)}{S((n-1)l)}\right).$$

假设证券的价格变化服从参数是 $\mu$ 和 $\sigma$ 的几何布朗运动，那么 $X_1$，…，$X_n$ 是期望为 $l\mu$、方差为 $l\sigma^2$ 的独立正态随机变量. 由 8.5.1 节知可以用 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/(n-1)$ 来估计 $l\sigma^2$. 于是可以用

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{l}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}.$$

来估计 $\sigma^2$. 此外，由等式(8-8)有

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma^2}) = \frac{1}{l^2}\frac{2(l\sigma^2)^2}{n-1} = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \tag{8-9}$$

根据等式(8-9)，就可以用任一时间段内的历史价格数据来得到 $\sigma^2$ 的任意一个精确的估计值. 也就是说，把时间段分割成很多小的子区间就可以得到 $\sigma^2$ 的一个无偏估计量，而这个估计量的方差可以任意地小. 然而，这种方法的困难之处在于，它强烈地依赖于下面的假设：价格比率 $S(il)/S((i-1)l)$ 的对数是独立同分布的，即使当时间间隔 $l$ 任意小时也如此. 事实上，如果一个证券的历史价格和一个几何布朗运动相类似，即使在微观下看它们也是不一样的. 换句话说，即使连续每天的收盘价格可能和一个几何布朗运动相吻合，但是对于每小时的价格(或者更小间隔的价格)变化，该假设很可能就不成立了. 所以，我们建议前面程序中所用的 $l$ 应该等于一天. 因为时间的单位是一年，而在一年中大概有 252 天的交易日，所以 $l=1/252$.

137

为使用这个模型来估计 $\sigma$，假设连续 $n$ 天的日收盘价为 $C_1$，…，$C_n$，其中 $C_i$ 是在第 $i$ 个交易日的收盘价. 令 $C_0$ 表示证券在这 $n$ 天之前一瞬间的收盘价，并且令

$$X_i = \log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right) = \log(C_i) - \log(C_{i-1}).$$

这些数据的样本方差

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1},$$

可以作为 $\sigma^2/252$ 的估计量；$S\sqrt{252}$ 可以用来估计 $\sigma$.

**注** 如果 $\mu$ 和 $\sigma$ 是几何布朗运动的漂移参数和波动参数，那么

$$E\left[\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right] = \frac{\mu}{252}, \quad \sqrt{\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{252}}.$$

因为典型的 $\mu$ 的值接近于0，而 $\sigma$ 的典型的值大于0.2，所以 $X_i=\log(C_i/C_{i-1})$ 的期望相对于它的标准差可以忽略不计．从而，我们可以用0来近似 $\mu$ 而用

138

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$$

作为 $\sigma^2/252$ 的估计量只会产生很小的效率损失．注意下面这个事实很重要，那就是即使几何布朗运动有一个随时间变化的漂移参数，这个估计量也依然能使用．(回忆即使在漂移参数随时间变化的情形，Black-Scholes公式仍然能够给出唯一的无套利价格.)

### 8.5.3 使用开盘数据和收盘数据

令 $C_i$ 表示在第 $i$ 个交易日结束时证券的(收盘)价格．在假设证券价格服从几何布朗运动的情况下，$\log(C_i/C_{i-1})$ 是正态随机变量，它的期望近似为0，方差是 $\sigma^2/252$．令 $O_i$ 表示第 $i$ 个交易日开始时证券的(开盘)价格，我们有

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)&=\log\left(\frac{C_i}{O_i}\frac{O_i}{C_{i-1}}\right)\\&=\log\left(\frac{C_i}{O_i}\right)+\log\left(\frac{O_i}{C_{i-1}}\right).\end{aligned}$$

又设 $C_i/O_i$ 和 $O_i/C_{i-1}$ 是相互独立的，即，在一个交易日内价格的变化率和交易日结束时价格的变化率是相互独立的，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1}))&=\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))+\mathrm{Var}(\log(O_i/C_{i-1}))\\&=\mathrm{Var}(C_i^*-O_i^*)+\mathrm{Var}(O_i^*-C_{i-1}^*),\end{aligned}\tag{8-10}$$

其中

$$C_j^*=\log(C_j),\quad O_j^*=\log(O_j).$$

由于 $C_i^*-O_i^*$ 和 $O_i^*-C_{i-1}^*$ 都有一个近似为0的期望，所以我们可以用

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(C_i^*-O_i^*)^2}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i^*-C_{i-1}^*)^2}{n}.$$

来估计 $\sigma^2/252=\mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1}))$．这就得到了波动参数 $\sigma$ 的估计量 $\hat{\sigma}$

139

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[(C_i^*-O_i^*)^2+(O_i^*-C_{i-1}^*)^2]}.\tag{8-11}$$

等式(8-11)应该比8.5.2节中所讲的 $\sigma$ 标准估计量更好.

### 8.5.4 使用开盘数据、收盘数据和最高最低数据

和8.5.3节中所使用的记号一样，对任意 $X$ 我们令 $X^*=\log(X)$.

用 $H(t)$ 表示证券在长度为 $t$ 的时间段内的最高价格，$L(t)$ 表示它的最低价格. 即

$$H(t) = \max_{0 \leqslant y \leqslant t} S(y),$$
$$L(t) = \min_{0 \leqslant y \leqslant t} S(y).$$

假设证券的价格服从漂移参数是 0，波动率是 $\sigma$ 的几何布朗运动，那么

$$E[(H^*(t) - L^*(t))^2] = 2.773\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right).$$

现在令 $O_i$ 和 $C_i$ 分别表示在第 $i$ 个交易日的开盘价和收盘价，令 $H_i$ 和 $L_i$ 分别表示当天的最高价和最低价. 由于 $E[\log(C_i/O_i)]\approx 0$，我们可以把一个交易日中的历史价格近似地看成一个漂移参数是 0 的几何布朗运动. 因此，利用前面的恒等式有

$$E[(H_i^* - L_i^*)^2] \approx 2.773\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)).$$

再使用 $n$ 天的数据值，就可以用估计量

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2.773}\frac{\sum_{i=1}^{n}(H_i^* - L_i^*)^2}{n} = \frac{0.361}{n}\sum_{i=1}^{n}(H_i^* - L_i^*)^2.$$

来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$.

当然，$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) = \mathrm{Var}(C_i^* - O_i^*)$ 也可以用下面的式子来估计

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2.$$

这些估计量以下形式的任意线性组合 [140]

$$\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2$$

都可以用来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$. 可以证明当 $\alpha=0.5/0.361=1.39$ 时，所得到的是这一类估计量之中的最优者(它的方差最小). 也就是说，$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$ 的最优估计量是

$$\varepsilon = \frac{0.5}{0.361}\varepsilon_1 - 0.39\varepsilon_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0.39(C_i^* - O_i^*)^2]. \tag{8-12}$$

由于我们可以用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2$ 来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) = \mathrm{Var}(C_i^* - O_{i-1}^*)$，所以

$$\varepsilon+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^*-C_{i-1}^*)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^*-L_i^*)^2-0.39(C_i^*-O_i^*)^2+(O_i^*-C_{i-1}^*)^2]$$

是

$$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))+\mathrm{Var}(\log(O_i/C_{i-1}))=\mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1}))$$
$$=\sigma^2/252.$$

的一个估计量．因此我们就可以用

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^*-L_i^*)^2-0.39(C_i^*-O_i^*)^2+(O_i^*-C_{i-1}^*)^2]}. \tag{8-13}$$

来估计波动参数 $\sigma$.

**注** 等式(8-13)所给出的 $\sigma$ 的估计量在以前的文献中没有出现过．我们这里所用的方法建立在 Garman 和 Klass 的论文(见参考文献[2])之上，他们推导了由等式(8-12)给出的 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$ 的估计量．然而，在他们更进一步的分析中，不仅假设当市场开放交易时证券的价格服从几何布朗运动，而且还假设当市场关闭时它也服从同样的几何布朗运动(尽管现在观察不到)．基于这些假设他们提议使用下面的等式：

141

$$\mathrm{Var}(C_i^*-O_i^*)=\frac{1-f}{252}\sigma^2,$$
$$\mathrm{Var}(O_i^*-C_{i-1}^*)=\frac{f}{252}\sigma^2,$$

其中 $f$ 是一天之中市场关闭时间所占的比例．然而，关于市场关闭时证券价格变化与市场开放时服从同样的概率分布的假设似乎很值得怀疑．所以我们就选择了一个相对弱的假设，即假定价格的变化率 $O_i/C_{i-1}$ 和第 $i-1$ 天之前所有的市场关闭时的价格相互独立．

## 8.6 一些评论

### 8.6.1 期权实际价格异于 Black-Scholes 价格时

现在假设我们已经估计出 $\sigma$ 的值，并将其代入 Black-Scholes 公式计算出了 $C(s,t,K,\sigma,r)$的值．如果市场中期权的实际价格不等于 $C(s,t,K,\sigma,r)$将会怎样？实际中真的存在一个投资策略使得我们可以稳赢吗？

很不幸，这个问题的答案是“可能不存在”．其一，当期权实际交易的价格与由 Black-Scholes 公式所得到的价格不一致时，套利策略要求对标的证券连续地

进行交易(买或卖). 这不仅在实际中是不可能的，而且即使可以用离散的交易去近似连续交易，由此所产生的交易费用也将会非常大从而很容易就超出了套利所获得的利润；其二，即使我们愿意相信所估计的$\sigma$历史值非常精确，但是它在期权有效期内也可能会发生变化. 事实上，市场价格与由公式所得的价格不同的一个原因，很有可能就是因为“市场”相信，在期权有效期内股票的波动率将会和它以前的值不同. 实际上，这也表明，代替用历史数据估计证券波动率，我们可通过下面的途径得到一个更精确的估计量，即求$\sigma$的一个估计值. 它和其他几个期权参数($s$, $t$, $K$, $r$)一起使得由 Black-Scholes 公式所确定的价格就等于市场中期权的实际价格. 不过，使用这种隐含波动率的困难在于，同一个证券有不同的期权，要么它们的到期日不同，要么它们的执行价不同，或者这两者都不相同. 这些情况就会产生隐含波动率$\sigma$的不同估计值. 但是有一个共同的现象，从虚值买入期权(指当前证券的市场价格比期权的交割价低得多)推导出的隐含波动率，要比从平价期权(指当前证券的市场价格在交割价附近)得到的值大得多. 对于用历史数据估计波动率所获得的 Black-Scholes 价格，上述论证说明，虚值买入期权相对平价买入期权，其价值高估了. 不能稳赢的第三个原因是，假设标的证券服从几何布朗运动仅仅是对实际情况的一种近似，而且，即便忽略了交易费用，套利策略的存在也要依赖于这个假设. 而实际中很多的交易商不同意几何布朗运动的假设：未来价格变化与以前的价格相互独立. 相反他们认为以前的价格经常是未来价格向上或者向下变化趋势的一个先兆. [142]

### 8.6.2 利率发生变化时

前面已经证明了期权的价格关于利率是一个增函数. 这是否意味着，当中央银行宣布提高利率时期权的价格应该增加，而当它宣布降低利率(关于美国的国债)时价格应该下降呢？如果证券的波动率保持不变的话，那么答案就是肯定的. 然而，当利率变化而此时证券的波动率保持不变时，就应该非常小心. 因为利率上升就会对一些投资者产生影响，使得他们从选择投资股票转向投资国库券或者其他固定收益的证券，而当利率下降时则会出现相反的现象；这样的一些行为有可能导致证券的波动率发生变化.

### 8.6.3 最后的评论

如果你认为几何布朗运动是一个合理的(尽管是近似的)模型，那么 Black-Scholes 公式就给出了一个合理的期权价格. 如果这个价格比市场价格显著地高(或者低)，那么通过买(或者卖)期权和卖(或者买)标的证券就可以得到一个套利机会. 这种策略，虽然不一定总能赢，但通常会有一个期望值为正而方差很小的收益. [143]

假设证券的价格变化服从一个参数是$\mu$和$\sigma$的几何布朗运动，在这个假设

下，即使期权的价格和 Black-Scholes 公式给出的价格一样，我们通常也可以使用这个策略来获得一个期望为正而且风险相对较小的收益. 因为此时假设，人们基于经验数据估计会相信参数 $\mu$ 不等于风险中性价值 $r-\sigma^2/2$. 如果

$$\mu > r-\sigma^2/2$$

那么购买证券和购买期权都会得到正的期望收益. 尽管不能避免所有的风险(因为无套利是可能的)，但通过下面两个方法均可实现一个期望收益为正的低风险策略：a)引入一个风险厌恶效用函数，再寻找一个策略使得效用的期望值达到最大；b)寻找一个策略，它有一个相当大的期望收益和一个相当小的方差. 这样的策略就是购买一些证券并卖出一些期权，或者相反. 类似地，如果

$$\mu < r-\sigma^2/2$$

那么购买证券和购买期权都会得到负的期望收益，同样我们还是要寻找一个低风险并且期望收益为正的策略，这个策略是卖出一个而买入另一个. 这种类型的问题将在下一章中考虑，同时还将介绍效用函数及其应用.

在我们看来，实际应用中可以对证券价格随时间变化的几何布朗运动模型进行改进，与其盲目地假设这样一个模型，不如利用历史数据来拟合一个更普通的模型. 如果成功的话，改进的模型能够给出更精确的期权价格，从而得到更有效的策略. 本书最后两章将涉及这些更一般的模型. 在第 12 章中，我们要说明几何布朗运动和原油价格的实际数据并不一致；然后给出一个改进了的模型，这个模型允许第二天的收盘价不仅依赖于当天的收盘价而且还依赖于前一天的收盘价，同时给出了基于该模型的期权风险中性定价. 在第 13 章中，我们将证明，一个一般化的几何布朗运动模型会导致一个自回归模型，当证券价格具有均值回归性质时就可以用这个模型作为证券的价格模型.

144

## 8.7 附录

对于 8.4 节中的模型，需要推导当 $m=1$, 2 时 $E[J^m(t)]$的表达式. 注意到

$$J^m(t)=\prod_{i=1}^{N(t)} J_i^m.$$

所以如果 $N(t)=n$，就有

$$\begin{aligned}
&E[J^m(t)\mid N(t)=n]\\
&=E\left[\prod_{i=1}^{N(t)} J_i^m \mid N(t)=n\right]\\
&=E\left[\prod_{i=1}^{n} J_i^m \mid N(t)=n\right]\\
&=E\left[\prod_{i=1}^{n} J_i^m\right] \quad (\text{由 } J_i \text{ 和 } N(t) \text{ 的独立性})\\
&=(E[J^m])^n \quad (\text{由 } J_i \text{ 的独立性}).
\end{aligned}$$

于是，

$$E[J^m(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} E[J^m(t) \mid N(t) = n] P\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (E[J^m])^n e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t E[J^m])^n / n!$$

$$= e^{-\lambda t(1-E[J^m])}.$$

145

从而有

$$E[J(t)] = e^{-\lambda t(1-E[J])}$$

以及

$$\mathrm{Var}(J(t)) = E[J^2(t)] - (E[J(t)])^2 = e^{-\lambda t(1-E[J^2])} - e^{-2\lambda t(1-E[J])}.$$

## 8.8 习题

**练习 8.1** 证券分红时，欧式买入和卖出期权的平价公式还成立吗？

**练习 8.2** 对于8.2.1节中的模型，在风险中性概率下，证券随时间变化的价格服从什么过程？

**练习 8.3** 求一个$(K, t)$买入期权的无套利价格，这个期权的标的证券在时刻$t_{d_i}$ $(i=1, 2)$有分红$fS(t_{d_i})$，其中$t_{d_1}<t_{d_2}<t$.

**练习 8.4** 考虑一个美式$(K, t)$买入期权，它的标的证券在时刻$t_d$有分红，其中$t_d<t$. 证明这个买入期权要么在时刻$t_d$之前的一瞬间执行，要么在到期日$t$执行.

**练习 8.5** 考虑一个欧式$(K, t)$买入期权，它在到期日的收益以$B$为上限. 即在时刻$t$的回报为

$$\min((S(t)-K)^+, B).$$

说明你如何使用 Black-Scholes 公式来求这个期权的无套利价格.

提示：把这个期权的回报分成两项普通(没有上限的)欧式买入期权的回报.

**练习 8.6** 证券当前的价格是$s$. 考虑一项投资，它的支出是$s$，对于一个给定的$\beta$，它满足$0<\beta<e^r-1$，在时刻 1 的回报由下式给出

$$\text{回报} = \begin{cases} (1+\beta)s & \text{若 } S(1) \leqslant (1+\beta)s, \\ (1+\beta)s + \alpha(S(1)-(1+\beta)s) & \text{若 } S(1) \geqslant (1+\beta)s. \end{cases}$$

146

如果这项投资(它的收益没有上限且总是比初始投资高)不允许有套利存在，求$\alpha$的值.

**练习 8.7** 下面的投资是关于一个当前价格是$s$的证券. 对于一个初始的成本$s$和一个选好的$\beta$值(满足$0<\beta<e^r-1$)，一年之后的回报由下面的式子给出

$$回报=\begin{cases}(1+\beta)s & 若 S(1)\leqslant(1+\beta)s,\\ S(1) & 若(1+\beta)s\leqslant S(1)\leqslant K,\\ K & 若 S(1)>K,\end{cases}$$

其中 $S(1)$是一年结束时证券的价格．也就是说，限制你在时刻 1 所得最大收益的代价是保证你在该时刻至少能得到 $1+\beta$ 倍于初始投资的收益．证明当 $K$ 满足

$$C(s,1,K,\sigma,r)=C(s,1,s(1+\beta),\sigma,r)+s(1+\beta)e^{-r}-s,$$

时，这个投资(可卖或买)不会有套利机会存在．其中 $C(s,t,K,\sigma,r)$是 Black-Scholes 价格．

**练习 8.8** 证明，对于 $f<r$，

$$C(se^{-ft},t,K,\sigma,r)=e^{-ft}C(s,t,K,\sigma,r-f).$$

**练习 8.9** 一个期权的期权，有时称为复合期权，是由参数对($K_1$，$t_1$)和($K$，$t$)给定的，其中 $t_1<t$．复合期权的持有者有权利以价格 $K_1$ 购买一个特定证券的($K$，$t$)买入期权．购买($K$，$t$)买入期权的期权可以在时刻 $t_1$ 之前的任意时间执行．

a)证明购买($K$，$t$)买入期权的期权永远不会在到期日 $t_1$ 之前被执行．

b)证明当且仅当 $S(t_1)\geqslant x$ 时，这个购买($K$，$t$)买入期权的期权应该被执行，这里 $x$ 是下面方程的解

147

$$K_1=C(x,t,K,\sigma,r),$$

其中 $C(s,t,K,\sigma,r)$由 Black-Scholes 公式所给，$S(t_1)$是证券在时刻 $t_1$ 的价格．

c)证明存在唯一的 $x$ 值满足上面的方程．

d)证明这个复合期权的唯一无套利价格可以表示为

$$复合期权的无套利价格=E[C(se^W,t-t_1,K,\sigma,r)I(se^W>x)],$$

其中：$s=S(0)$是证券的初始价格；$x$ 是 b)中所给的值；$W$ 是一个均值是 $(r-\sigma^2/2)t_1$、方差是 $\sigma^2 t_1$ 的正态随机变量；如果 $se^W>x$，$I(se^W>x)$定义为 1，否则就定义为 0；$C(s,t,K,\sigma,r)$为 Black-Scholes 价格．(此无套利价格公式可以简化成只涉及二元正态分布的一个表达式．)

**练习 8.10** 一个($K_1$，$t_1$，$K_2$，$t_2$)双重买入期权就是这样一个期权，它既可以在时刻 $t_1$ 以执行价 $K_1$ 执行，也可以在时刻 $t_2$ 以执行价 $K_2$ 执行($t_2>t_1$)．

a)证明如果 $K_1>e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，那么永远不会在时刻 $t_1$ 执行该期权．

b)假设 $K_1<e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，证明存在一个 $x$ 值使得：如果 $S(t_1)>x$，那么期权应该在时刻 $t_1$ 执行，而如果 $S(t_1)<x$，则不应该在时刻 $t_1$ 执行期权．

**练习 8.11** 扩展图 8-1，使它给出时刻 $t_0$，$t_1$，$t_2$，$t_3$，$t_4$ 可能的价格模式．

**练习 8.12** 使用8.3节中的记号，你认为下面的观点中哪些是正确的？并说明原因．

a)固定 $i$，$V_k(i)$关于 $k$ 是单调不减的．

b)固定 $i$，$V_k(i)$关于 $k$ 是单调不增的．

c)固定 $k$，$V_k(i)$关于 $i$ 是单调不减的.

d)固定 $k$，$V_k(i)$关于 $i$ 是单调不增的.

**练习 8.13** 一个欧式卖出期权，它的参数与例 8.3a 中给出的相同，求它的风险中性价格.

148

**练习 8.14** 一个美式卖出期权，它的参数如下：

$$s=10,\quad t=0.25,\quad K=10,\quad \sigma=0.3,\quad r=0.06.$$

导出这个期权风险中性价格的近似值.

**练习 8.15** 一个美式的资产或无价值(asset-or-nothing)期权(参数是 $K$，$F$，到期日为 $t$)可以在 $t$ 之前的任何时刻执行. 当期权被执行时，如果证券的价格是 $K$ 或者更高，就可以得到 $F$；而如果此时证券的价格低于 $K$，则什么也得不到. 说明如何用一个多时期二项模型来近似一个美式资产或无价值(asset-or-nothing)买入期权的风险中性价格.

**练习 8.16** 当

$$s=10,\quad t=0.25,\quad K=11,\quad F=20,\quad \sigma=0.3,\quad r=0.06$$

时，导出一个美式资产或无价值(asset-or-nothing)买入期权风险中性价格的近似值.

**练习 8.17** 表8-1提供了从2001年 8 月 13 日到 2001 年 11 月 1 日微软股票价格的数据.

a)利用这个表中的数据和8.5.2节中的估计量来估计 $\sigma$.

b)使用 8.5.3 节中的估计量来估计 $\sigma$.

c)使用8.5.4节中的估计量来估计 $\sigma$.

**表 8-1**

| 日期 | 开盘数据 | 最高数据 | 最低数据 | 收盘数据 | 交易量 |
|---|---|---|---|---|---|
| 01/11/12 | 64.7 | 66.44 | 63.65 | 65.79 | 28 876 400 |
| 01/11/9 | 64.34 | 65.65 | 63.91 | 65.21 | 24 006 800 |
| 01/11/8 | 64.46 | 66.06 | 63.66 | 64.42 | 37 113 900 |
| 01/11/7 | 64.22 | 65.05 | 64.03 | 64.25 | 29 449 500 |
| 01/11/6 | 62.7 | 64.94 | 62.16 | 64.78 | 34 306 000 |
| 01/11/5 | 61.86 | 64.03 | 61.75 | 63.27 | 33 200 800 |
| 01/11/2 | 61.93 | 63.02 | 60.51 | 61.4 | 41 680 000 |
| 01/11/1 | 60.08 | 62.25 | 59.6 | 61.84 | 54 835 600 |
| 01/10/31 | 59.3 | 60.73 | 58.1 | 58.15 | 32 350 000 |
| 01/10/30 | 58.92 | 59.54 | 58.19 | 58.88 | 28 697 800 |
| 01/10/29 | 62.1 | 62.2 | 59.54 | 59.64 | 27 564 700 |
| 01/10/26 | 62.32 | 63.63 | 62.08 | 62.2 | 32 254 700 |
| 01/10/25 | 60.61 | 62.6 | 59.57 | 62.56 | 37 659 100 |
| 01/10/24 | 60.5 | 61.62 | 59.62 | 61.32 | 39 570 700 |
| 01/10/23 | 60.47 | 61.44 | 59.4 | 60.43 | 40 162 500 |
| 01/10/22 | 57.9 | 60.18 | 57.47 | 60.16 | 36 161 800 |
| 01/10/19 | 57.4 | 58.01 | 55.63 | 57.9 | 45 609 800 |

（续）

| 日期 | 开盘数据 | 最高数据 | 最低数据 | 收盘数据 | 交易量 |
|---|---|---|---|---|---|
| 01/10/18 | 56.34 | 57.58 | 55.5 | 56.75 | 39 174 000 |
| 01/10/17 | 59.12 | 59.3 | 55.98 | 56.03 | 36 855 300 |
| 01/10/16 | 57.87 | 58.91 | 57.21 | 58.45 | 33 084 500 |
| 01/10/15 | 55.9 | 58.5 | 55.85 | 58.06 | 34 218 500 |
| 01/10/12 | 55.7 | 56.64 | 54.55 | 56.38 | 31 653 500 |
| 01/10/11 | 55.76 | 56.84 | 54.59 | 56.32 | 41 871 300 |
| 01/10/10 | 53.6 | 55.75 | 53.0 | 55.51 | 43 174 600 |
| 01/10/9 | 57.5 | 57.57 | 54.19 | 54.56 | 49 738 800 |
| 01/10/8 | 56.8 | 58.65 | 56.74 | 58.04 | 30 302 900 |
| 01/10/5 | 56.16 | 58.0 | 54.94 | 57.72 | 40 422 200 |
| 01/10/4 | 56.92 | 58.4 | 56.21 | 56.44 | 50 889 000 |
| 01/10/3 | 52.48 | 56.93 | 52.4 | 56.23 | 48 599 600 |
| 01/10/2 | 51.63 | 53.55 | 51.56 | 53.05 | 40 430 400 |
| 01/10/1 | 50.94 | 52.5 | 50.41 | 51.79 | 34 999 800 |
| 01/9/28 | 49.62 | 51.59 | 48.98 | 51.17 | 58 320 600 |
| 01/9/27 | 50.1 | 50.68 | 48.0 | 49.96 | 40 595 600 |
| 01/9/26 | 51.51 | 51.8 | 49.55 | 50.27 | 29 262 200 |
| 01/9/25 | 52.27 | 53.0 | 50.16 | 51.3 | 42 470 300 |
| 01/9/24 | 50.65 | 52.45 | 49.87 | 52.01 | 42 790 100 |
| 01/9/21 | 47.92 | 50.6 | 47.5 | 49.71 | 92 488 300 |
| 01/9/20 | 52.35 | 52.61 | 50.67 | 50.76 | 58 991 600 |
| 01/9/19 | 54.46 | 54.7 | 50.6 | 53.87 | 63 475 100 |
| 01/9/18 | 53.41 | 55.0 | 53.17 | 54.32 | 41 591 300 |
| 01/9/17 | 54.02 | 55.1 | 52.8 | 52.91 | 63 751 000 |
| 01/9/10 | 54.92 | 57.95 | 54.7 | 57.58 | 42 235 900 |
| 01/9/7 | 56.11 | 57.36 | 55.31 | 55.4 | 44 931 900 |
| 01/9/6 | 56.56 | 58.39 | 55.9 | 56.02 | 56 178 400 |
| 01/9/5 | 56.18 | 58.39 | 55.39 | 57.74 | 44 735 300 |
| 01/9/4 | 57.19 | 59.08 | 56.07 | 56.1 | 33 594 600 |
| 01/8/31 | 56.85 | 58.06 | 56.3 | 57.05 | 28 950 400 |
| 01/8/30 | 59.04 | 59.66 | 56.52 | 56.94 | 48 816 000 |
| 01/8/29 | 61.05 | 61.3 | 59.54 | 60.25 | 24 085 000 |
| 01/8/28 | 62.34 | 62.95 | 60.58 | 60.74 | 23 711 400 |
| 01/8/27 | 61.9 | 63.36 | 61.57 | 62.31 | 22 281 400 |
| 01/8/24 | 59.6 | 62.28 | 59.23 | 62.05 | 31 699 500 |
| 01/8/23 | 60.67 | 61.53 | 59.0 | 59.12 | 25 906 600 |
| 01/8/22 | 61.13 | 61.15 | 59.08 | 60.66 | 39 053 600 |
| 01/8/21 | 62.7 | 63.2 | 60.71 | 60.78 | 23 555 900 |
| 01/8/20 | 61.66 | 62.75 | 61.1 | 62.7 | 24 185 600 |
| 01/8/17 | 63.78 | 64.13 | 61.5 | 61.88 | 26 117 100 |
| 01/8/16 | 62.84 | 64.71 | 62.7 | 64.62 | 21 952 800 |
| 01/8/15 | 64.71 | 65.05 | 63.2 | 63.2 | 19 751 500 |
| 01/8/14 | 65.75 | 66.09 | 64.45 | 64.69 | 18 240 600 |
| 01/8/13 | 65.24 | 65.99 | 64.75 | 65.83 | 16 337 700 |

## 参考文献

[1] Cox, J., and M. Rubinstein(1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[2] Garman, M., and M. J. Klass(1980). "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data." *Journal of Business* 53: 67—78.

[3] Merton, R. C. (1976). "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous." *Journal of Financial Economics* 3: 125—44.

[4] Rogers, L. C. G., and S. E. Satchell(1991). "Estimating Variance from High, Low, and Closing Prices." *Annals of Applied Probability* 1: 504—12.

149～151



# 第9章　期望效用估值法

## 9.1　套利定价的局限性

虽然套利是决定合理投资成本的有力工具，但用它通常不能唯一地确定投资成本．事实上，从下面的例子可以看出，即便是对单时期期权，如果它的标的证券在下一个时期有两个以上可能价格时，其无套利价格也不是唯一的．

**例 9.1a**　考虑 5.1 节买入期权的例子．设标的证券初始价格为 100，现假定在时刻 1，它的价格可能是 50，100，200．也就是说允许出现这种可能：在时刻 1，股票价格相对于初始价格没有变化(见图 9-1)．和 5.1 节一样，我们现在希望求出执行价为 150，到期日为时刻 1 的买入期权的价格．

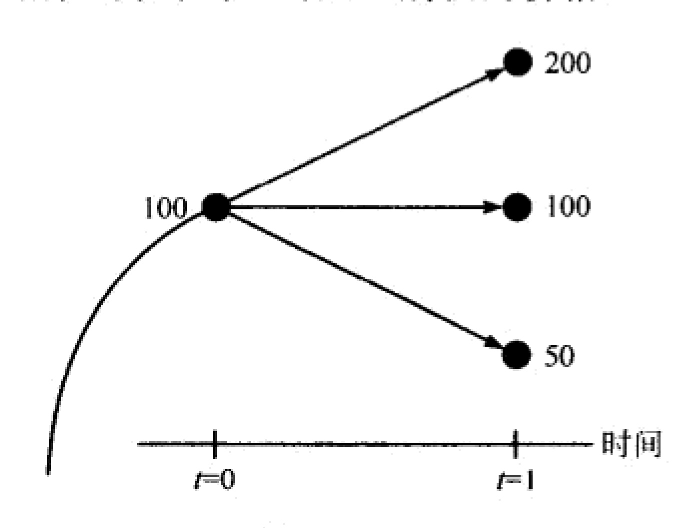



图 9-1　时刻 1 可能的股票价格

为简单起见，设利率 $r$ 等于 0．套利定理告诉我们，如果存在非负实数 $p_{50}$，$p_{100}$，$p_{200}$ 满足：a)它们的和为 1；b) 时刻 1 股票价格是 $i$ ($i=50$，100，200)的概率为 $p_i$ 时，购买一股股票或一个期权的期望收益为零．以 $G_s$ 表示在时刻 1 购买一股股票的收益，$S(1)$为时刻 1 时股票的价格，那么我们有

$$G_s = \begin{cases} 100 & \text{若 } S(1) = 200, \\ 0 & \text{若 } S(1) = 100, \\ -50 & \text{若 } S(1) = 50. \end{cases}$$

因此

$$E[G_s] = 100p_{200} - 50p_{50}.$$

此外，如果 $c$ 是期权价格，则购买一个期权所获的收益为：

152

$$G_o = \begin{cases} 50 - c & \text{若 } S(1) = 200, \\ -c & \text{若 } S(1) = 100 \text{ 或 } S(1) = 50. \end{cases}$$

所以

$$E[G_o] = (50-c)p_{200} - c(p_{50}+p_{100})$$
$$= 50p_{200} - c.$$

令 $E[G_s]$和 $E[G_o]$都等于0，则无套利的条件是存在满足下列条件的概率和期权价格 $c$：

$$p_{200} = \frac{1}{2}p_{50} \quad 和 \quad c = 50p_{200}.$$

左边等式意味着 $p_{200} \leqslant 1/3$，由此知对任意 $c(0 \leqslant c \leqslant 50/3)$，都存在概率使购买股票和购买期权均为公平赌博. 因此只要期权价格在区间[0, 50/3]之间，无套利都是可能的. □

## 9.2 利用期望效用估计投资价值

假定我们必须从两种可能的投资中选择其一，每种投资都可能产生 $n$ 种结[153]果，记为 $C_1$，$C_2$，…，$C_n$. 若选择投资1，则出现结果 $C_i$ 的概率为 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$；若选择投资2，则相应概率为 $q_i(i=1, \cdots, n)$，其中 $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. 下述方法可用于决定选择哪一种投资.

首先对投资结果进行赋值. 先确定最好和最坏结果，分别记为 $C$、$c$；赋值 $c=0$，$C=1$. 然后考虑另外 $n-2$ 个结果，设 $C_i$ 为其中一个. 现在假定给你两种选择，一种是获得固定的收入 $C_i$；另一种是：以概率 $u$ 获得 $C$，以概率 $1-u$ 获得 $c$. 显然，你的选择依赖于 $u$ 的值. 若 $u=1$，则必然获得 $C$；既然 $C$ 是最理想的结果，那么你理所当然地选择第二种. 另一方面，如果 $u=0$，则第二种选择的结果肯定是最糟糕的 $c$，自然你会选择第一种以获得固定收入 $C_i$. 现在，让 $u$ 从1减少到0，那么在 $u$ 取某个值时，你的选择就会从第二种改为第一种. 此时这两种选择对你来说是无差别的. 将此时无差异概率的 $u$ 值设定为结果 $C_i$ 的值. 换句话说，$C_i$ 的值就是概率 $u$ 的值，这个值使你认为直接得到 $C_i$ 和获得未定收益无差别. 我们称这个无差异概率为结果 $C_i$ 的*效用*，记为 $u(C_i)$.

为决定选择哪种投资，我们必须估计每种投资的价值. 首先考虑投资1，出现结果 $C_i$ 的概率为 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 将这一投资看成一个两步试验的结果：第一步，从1，2，…，$n$ 中随机选择一个数，设随机选中1，2，…，$n$ 的概率分别为 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$；第二步如果选中 $i$，就可以获得 $C_i$. 由于 $C_i$ 等价于以概率 $u(C_i)$获得 $C$ 或以 $1-u(C_i)$的概率获得 $c$. 这样，两步试验的结果就等价于一[154]个可能结果为 $C$ 或 $c$ 的试验. 在此试验中获得 $C$ 的概率为：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(C_i).$$

类似地，投资2也等价于参加一个可能结果为 $C$ 与 $c$ 的试验，而在这个试验里获得 $C$ 的概率为：

$$\sum_{i=1}^{n} q_i u(C_i).$$

由于 $C$ 优于 $c$，所以当

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(C_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i u(C_i).$$

时，投资 1 优于投资 2. 换句话说，投资的价值可以用投资结果的效用期望值来衡量，具有最大期望效用的投资最优.

在许多投资中，投资的结果就是投资者获得了多少钱. 在此情形下，我们就可以用获得美元的数量作为投资结果，因此 $u(x)$就是投资者获得 $x$ 美元的效用. 我们称 $u(x)$为*效用函数*. 如果一个投资者需要从两个投资策略中进行选择，其中投资 1 回报为 $X$ 美元，投资 2 回报为 $Y$ 美元，如果 $E[u(X)]>E[u(Y)]$，则选择投资 1. 反之，选择投资 2，这里 $u(x)$是该投资者的效用函数. 因为可能的投资回报经常构成一个无穷集合，所以去掉 $u(x)$在[0, 1]之间取值的限制比较方便.

投资者的效用函数会因投资者的不同而异，但通常都假定 $u(x)$是 $x$ 的非减函数. 另外，大多数投资者有这样共同(但非普遍)的特征：如果他们期望获得 $x$，则在 $x$ 基础上再增收 $\Delta$ 所带来的效用增长量关于 $x$ 非增. 也就是说，固定 $\Delta>0$，则效用函数满足： 155

$$u(x+\Delta)-u(x)\text{关于 } x \text{ 非增}.$$

满足上述条件的效用函数称为*凹函数*. 这个性质可以用下式表示：

$$u''(x)\leqslant 0.$$

一个函数是凹的当且仅当其二阶导数是非正的. 图 9-2 给出了一个凹函数的曲线. 这种曲线具有这样的性质：曲线上任意两点的连线总是位于曲线在这两点间的部分的下方.

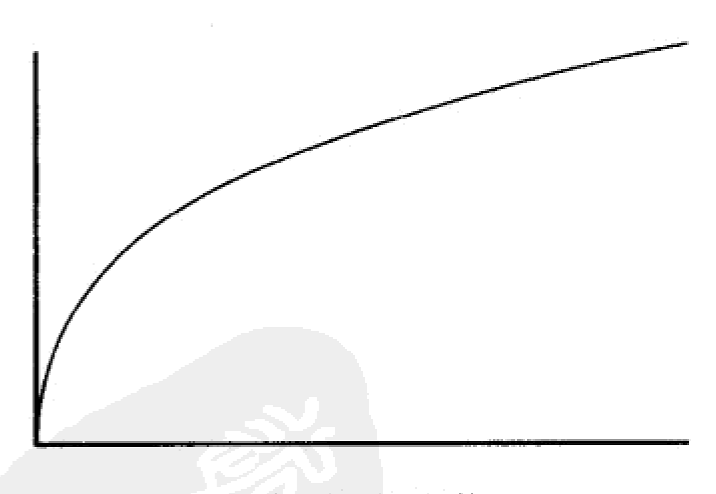


图 9-2 凹函数

如果一个投资者的效用函数是凹的，则称投资者是*风险厌恶的*. 这个概念是由*詹森不等式*得到的，该不等式指出，如果 $u$ 是凹函数，则对任意随机变量

$X$，有：

$$E[u(X)] \leqslant u[E(X)].$$

若设 $X$ 为投资回报，由詹森不等式可知，具有凹效用函数的投资者更喜欢获得确定性收益 $E[X]$，而不愿接受具有这个期望值的随机回报.

如果一个投资者具有线性效用函数，

156

$$u(x) = a + bx, \quad b > 0,$$

则称其为风险中性者或风险无差异者. 因为这种效用函数满足：

$$E[u(X)] = a + bE[X]$$

所以风险中性投资者仅仅通过期望回报来估计他们投资的价值.

一个常用的效用函数是对数效用函数：

$$u(x) = \log(x);$$

见图 9-3. 由于 $\log(x)$ 是凹函数，所以具有对数效用函数的投资者是风险厌恶者. 这是一个重要的效用函数，因为在数学上可以证明，在许多情况下，如果用对数效用函数模型，当投资者面临一个无穷投资序列时，可以采用对数效用函数通过最大化每一期的期望效用来使其长期回报率最大化.

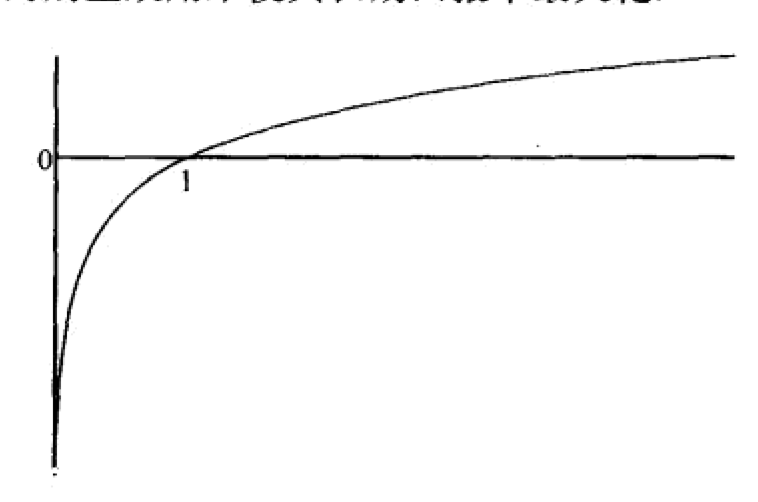



图 9-3 对数效用函数

为了便于理解其中的原因，设每一期的投资结果将投资者的财富放大一个随机倍数 $X$. 记 $W_n$ 为 $n$ 次投资后投资者的财富，$X_n$ 为第 $n$ 次投资的增长倍数，则：

157

$$W_n = X_n W_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

$W_0$ 为投资者的初始财富，由上式可得：

$$\begin{aligned} W_n &= X_n W_{n-1} \\ &= X_n X_{n-1} W_{n-2} \\ &= X_n X_{n-1} X_{n-2} W_{n-3} \\ &\vdots \\ &= X_n X_{n-1} \cdots X_1 W_0. \end{aligned}$$

将 $n$ 次投资的平均回报率记为 $R_n$，则有

$$\frac{W_n}{(1+R_n)^n} = W_0$$

或

$$(1+R_n)^n = \frac{W_n}{W_0} = X_1 \cdots X_n.$$

两边取对数，得

$$\log(1+R_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}{n}.$$

若 $X_i$ 独立同分布，则由强大数定律，$\log(X_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 的平均值随 $n$ 的增大逐渐趋近于 $E[\log(X_i)]$. 所以，

$$\log(1+R_n) \to E[\log(X)], \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}.$$

因此，如果一个人选择了某种投资方式，即确定了因子 $X_i$ 的概率，那么可以通过选择使 $E[\log(X)]$最大的投资从而达到最大的长期投资回报率.

下面的例子告诉我们，一个具有对数效用函数的投资者在其喜爱的赌博中应该投入多少钱.

**例 9.2a** 一个投资者有本金 $x$，可以投资的钱数在 0 到 $x$ 之间，如果投资了 $y$，则会以概率 $p$ 获益 $y$，以 $1-p$ 损失 $y$. 如果 $p>1/2$，投资者的效用函数是对数的，则投资者应该投入多少？

158

**解**：设投入金额是 $\alpha x$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，投资者的投资结果记为 $X$，它等于 $x+\alpha x$ 或 $x-\alpha x$，出现这两种结果的概率分别为 $p$，$1-p$，它的期望效用为：

$$\begin{aligned} & p\log((1+\alpha)x) + (1-p)\log((1-\alpha)x) \\ & = p\log(1+\alpha) + p\log(x) + (1-p)\log(1-\alpha) + (1-p)\log(x) \\ & = \log(x) + p\log(1+\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha). \end{aligned}$$

为求出 $\alpha$ 的最优值，对上式关于 $\alpha$ 求导

$$p\log(1+\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha)$$

得：

$$\frac{d}{d\alpha}(p\log(1+\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha)) = \frac{p}{1+\alpha} - \frac{1-p}{1-\alpha}.$$

令上式等于 0，得：

$$p - \alpha p = 1 - p + \alpha - \alpha p \quad \text{或} \quad \alpha = 2p - 1.$$

所以投资者每次都应投资他现有财富的 $100(2p-1)\%$. 例如，如果获利的概率 $p=0.6$，则投资者应该投资全部财富的 20%. 如果 $p=0.7$，他应该投资 40%.（当 $P\leqslant 1/2$ 时，容易证明最优投资数量为 0.） □

下面我们在上述例子的基础上加入时间因素.

**例 9.2b** 在例 9.2a 中，假定投资 $\alpha x$ 后，如果获利，则收益 $2\alpha x$ 在一个单位时间之后才会支付，并假设未投资的部分可以存入银行，每期利率为 $r$. 求此情况下，应投资多少?

**解**：设投资者投资 $\alpha x$，将剩余的 $(1-\alpha)x$ 存到银行，那么一期后，存款变为 $(1+r)(1-\alpha)x$，而投资部分变为 $2\alpha x$（概率为 $p$）或 0（概率为 $1-p$）. 他财富的期望效用为：

159

$$\begin{aligned}&p\log((1+r)(1-\alpha)x+2\alpha x)+(1-p)\log((1+r)(1-\alpha)x)\\&\quad=\log(x)+p\log(1+r+\alpha-\alpha r)\\&\qquad+(1-p)\log(1+r)+(1-p)\log(1-\alpha).\end{aligned}$$

因此，一个人财富的最优投资比例不会因财富的多少而改变. 现对上式关于 $\alpha$ 求导有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\text{期望效用})=\frac{p(1-r)}{1+r+\alpha-\alpha r}-\frac{1-p}{1-\alpha}.$$

令此导数值等于 0，解方程可得 $\alpha$ 的最优值：

$$\alpha=\frac{p(1-r)-(1-p)(1+r)}{1-r}=\frac{2p-1-r}{1-r}.$$

例如，当 $p=0.6$，$r=0.05$ 时，投资的期望回报率是 20%（而全部资本存入银行只能收益 5%），此时最优投资比例为

$$\alpha=\frac{0.15}{0.95}\approx 0.158.$$

也就是说，投资者应该将财富的 15.8%进行投资，而将剩余的部分存入银行. □

另外一个常用的效用函数称为**指数效用函数**：

$$u(x)=1-\mathrm{e}^{-bx},\quad b>0.$$

指数效用函数也是风险厌恶效用函数（见图 9-4）.

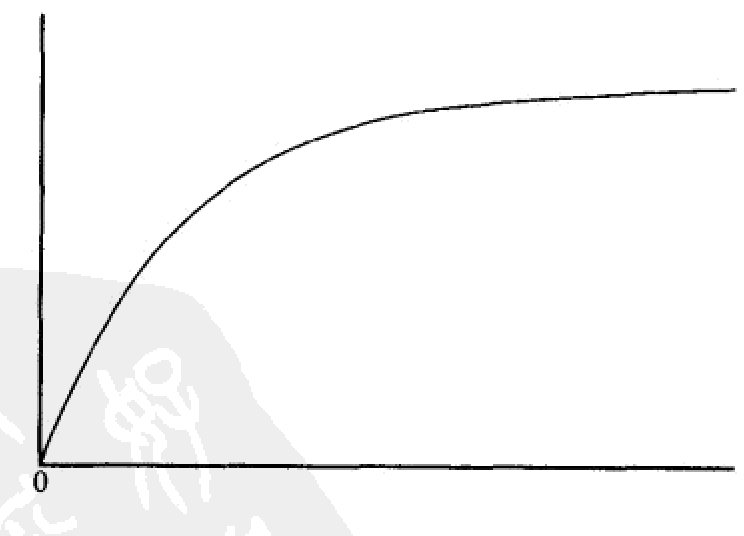



图 9-4 指数效用函数

## 9.3 投资组合的选择问题

设一投资者欲将 $w(w>0)$ 的资本投资到 $n$ 种不同的证券. 如果投资到证券 $i$ 的数量为 $a$ ($i=1, \cdots, n$)，一个时期后，投资回报为 $aX_i$，$X_i$ 是非负随机变量. 换句话说，设 $R_i$ 为证券 $i$ 的投资回报率，则：

$$a=\frac{aX_i}{1+R_i} \quad 或 \quad R_i=X_i-1.$$

如果 $w_i$ 是投入证券 $i$ 的金额($i=1, \cdots, n$)，则一个时期末的财富为：

$$W=\sum_{i=1}^{n} w_i X_i.$$

向量($w_1, \cdots, w_n$)称为一个投资组合. 确定一个投资组合，使投资者在时期末的期望效用最大化的问题可以从数学上表示为：

$$\text{选择}(w_1,\cdots,w_n)\text{，满足：}$$

$$w_i \geqslant 0, \quad i=1,\cdots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = w,$$

$$\text{使 } E[U(W)] \text{ 最大}$$

160～161

其中 $U$ 是投资者期末财富的效用函数.

为了使该问题更容易处理，我们设时期末财富 $W$ 为一个正态随机变量. 实际上只要投资者投资的众多证券间不是高度相关的，则由中心极限定理，这种假设是一个合理的近似. (如果 $X_i$，$i=1, \cdots, n$ 服从多元正态分布，则这种假设就是真的.)

现在假设投资者的效用函数是指数函数：

$$U(x)=1-\mathrm{e}^{bx}, \quad b>0,$$

则效用函数是凹的. 若 $Z$ 是一正态随机变量，则 $\mathrm{e}^Z$ 是对数正态的，期望值为：

$$E[\mathrm{e}^Z]=\exp\{E[Z]+\mathrm{Var}(Z)/2\}.$$

又 $-bW$ 是均值为 $-bE[W]$，方差为 $b^2\mathrm{Var}(W)$ 的正态随机变量，故：

$$E[U(W)]=1-E[\mathrm{e}^{-bW}]=1-\exp\{-bE[W]+b^2\mathrm{Var}(W)/2\}.$$

因此若选择满足下面条件的投资组合，则投资者的期望效用会达到最大：

$$\max\{E[W]-b\mathrm{Var}(W)/2\}.$$

注意这实际上意味着：如果两个组合分别产生随机期末财富 $W_1$，$W_2$，且 $W_1$ 比 $W_2$ 有较大的均值和较小的方差，则组合 1 比组合 2 的期望效用更大，即：

$$E[W_1] \geqslant E[W_2] \ \& \ \mathrm{Var}(W_1) \leqslant \mathrm{Var}(W_2)$$
$$\Rightarrow E[U(W_1)] \geqslant E[U(W_2)]. \tag{9-1}$$

事实上，如果所有期末财富均为正态随机变量，那么即使效用函数不是指数的，只要它是非减的凹函数，式(9-1)仍然成立. 所以，对于一个风险厌恶投资者来说，如果投资1的期望收益不小于投资2的期望收益，方差不大于投资2的方差，那么就选择投资1.

162

现在我们计算给定组合下，$W$ 的均值和方差. 其中证券 $i$ 的回报率为 $R_i=X_i-1$，令

$$r_i = E[R_i],\quad v_i^2 = \mathrm{Var}(R_i).$$

由于：

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i(1+R_i) = w + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i,$$

我们有，

$$\begin{aligned} E[W] &= w + \sum_{i=1}^{n} E[w_i R_i] \\ &= w + \sum_{i=1}^{n} w_i r_i; \end{aligned} \tag{9-2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(W) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(w_i R_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}(w_i R_i, w_j R_j) \quad (\text{由等式 (1-11)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} w_i w_j c(i,j), \end{aligned} \tag{9-3}$$

其中：

$$c(i,j) = \mathrm{Cov}(R_i, R_j).$$

**例 9.3a** 考虑将100的资本投资到两种证券，它们回报率的均值和标准差分别为：

$$r_1 = 0.15,\quad v_1 = 0.20;\quad r_2 = 0.18,\quad v_2 = 0.25.$$

若两个回报率的相关系数 $\rho=-0.4$，投资者的效用函数为：

163

$$U(x) = 1 - e^{-0.005x}.$$

求这两个证券的最优组合.

**解**：设 $w_1=y$，$w_2=100-y$，由式(9-2)得：

$$E[W] = 100 + 0.15y + 0.18(100-y) = 118 - 0.03y.$$

又由于 $c(1,2)=\rho v_1 v_2=-0.02$，由式(9-3)得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W) &= y^2(0.04) + (100-y)^2(0.0625) - 2y(100-y)(0.02) \\ &= 0.1425y^2 - 16.5y + 625.\end{aligned}$$

所以我们应该选择 $y$，使下式的值达到最大：

$$118 - 0.03y - 0.005(0.1425y^2 - 16.5y + 625)/2$$

或等价地，最大化

$$0.01125y - 0.0007125y^2/2.$$

简单计算后得知 $y$ 取下值时，上式达到最大：

$$y = \frac{0.01125}{0.0007125} = 15.789.$$

即，当投资 15.789 于证券 1，投资 84.211 于证券 2 时，期末财富的期望效用达到最大．将 $y=15.789$ 代入前面等式，得 $E[W]=117.526$，$\mathrm{Var}(W)=400.006$，最大期望效用等于：

$$1-\exp\{-0.005(117.526+0.005(400.006)/2)\}=0.4416.$$

这可以和下述投资组合的效用比较一下：将 100 全部投资到证券 1 时，期望效用为 0.3904；当 100 全部投资到证券 2 时，期望效用为 0.4413. □

**例 9.3b** 考虑两个证券，二者具有相同的期望收益率．在此情况下，所有的投资组合都产生相同的投资回报率，因此对于凹的效用函数来说，最佳组合应该使期末财富具有最小方差．如果将 $\alpha w$ 投资于证券 1，$(1-\alpha)w$ 投资于证券 2，$c=c(1,2)$，我们有

164

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W) &= \alpha^2 w^2 v_1^2 + (1-\alpha)^2 w^2 v_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)w^2 c \\ &= w^2[\alpha^2 v_1^2 + (1-\alpha)^2 v_2^2 + 2c\alpha(1-\alpha)].\end{aligned}$$

这样，当 $\alpha$ 的取值使 $\alpha^2 v_1^2+(1-\alpha)^2 v_2^2+2c\alpha(1-\alpha)$ 最小时可以获得最优组合．对上式关于 $\alpha$ 求导，并令导数等于 0，得

$$2\alpha v_1^2 - 2(1-\alpha)v_2^2 + 2c - 4c\alpha = 0.$$

解上述方程，得到证券 1 在最优投资中的比例为

$$\alpha = \frac{v_2^2 - c}{v_1^2 + v_2^2 - 2c}.$$

例如，设回报率的标准差 $v_1=0.20$，$v_2=0.30$，两个证券回报率的相关系数 $\rho=0.30$，那么 $c=\rho v_1 v_2=0.018$，于是我们得到最优组合中投资到证券 1 的比例为

$$\alpha = \frac{0.09-0.018}{0.04+0.09-0.036} = 72/94 \approx 0.766.$$

即将资本的 76.6%购买证券 1，23.4%购买证券 2.

如果两个证券的回报是独立的，那么 $c=0$，此时投入证券 1 的最优比例为：



$$\alpha = \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1/v_1^2}{1/v_1^2 + 1/v_2^2}.$$

在此情形下，投资于一个证券的最优资本比例由这样一个加权平均决定，其中的权重与证券回报率方差成反比．这一结果对 $n$ 个证券仍然是正确的，只要这些证券的回报率互不相关且期望相等．这样的话，投资于证券 $i$ 的最优资本比例是：

$$\frac{1/v_i^2}{\sum_{j=1}^{n} 1/v_j^2}.$$ □

165 寻找一个组合使投资者期末财富期望效用最大化，一般要进行大量的计算．但若效用函数 $U(x)$ 的二阶导数是一个非减函数，即

$$U''(x) \text{ 关于 } x \text{ 非减} \tag{9-4}$$

那么常常可以找到一个合理的近似算法．

容易验证下列效用函数均满足条件(9-4)：

$$U(x) = x^a, \quad 0 < a < 1,$$
$$U(x) = 1 - e^{-bx}, \quad b > 0,$$
$$U(x) = \log(x)$$

设 $U(x)$ 满足条件(9-4)，我们可以用在点 $\mu = E[W]$ 处的泰勒级数展开的前三项来估计 $U(W)$：

$$U(W) \approx U(\mu) + U'(\mu)(W - \mu) + U''(\mu)(W - \mu)^2/2.$$

两边取期望得：

$$\begin{aligned} E[U(W)] &\approx U(\mu) + U'(\mu)E[W - \mu] + U''(\mu)E[(W - \mu)^2]/2 \\ &= U(\mu) + U''(\mu)v^2/2, \end{aligned}$$

其中 $v^2 = \mathrm{Var}(W)$，而且我们知道：

$$E[W - \mu] = E[W] - \mu = \mu - \mu = 0.$$

所以最优组合的一个合理近似可由使下式

$$U(E[W]) + U''(E[W])\mathrm{Var}(W)/2. \tag{9-5}$$

最大化的组合得到．

如果 $U$ 是非减的凹函数且满足条件(9-4)，则表达式(9-5)同时具有所希望的两个性质：关于 $E[W]$ 递增，关于 $\mathrm{Var}(W)$ 递减．

具有形式 $U(x) = x^a$ 或 $U(x) = \log(x)$ 的效用函数具有下面的性质：存在向量

166

$$\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*, \quad \alpha_i^* \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* = 1,$$

使得对于任意初始财富 $w$，从这些效用函数中选出一个，在这个效用函数下的最优组合为 $w\alpha_1^*$，…，$w\alpha_n^*$．对于这些效用函数，投资者的财富投入到证券 $i$ 的最

优比例不依赖于 $w$. 为了证明这一点，注意到对任意组合 $w\alpha_1$，…，$w\alpha_n$：

$$W = w\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

而且，如果 $U(x)=x^a$，则：

$$\begin{aligned}E[U(W)] &= E[W^a]\\ &= E\left[w^a\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)^a\right]\\ &= w^a E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)^a\right]\end{aligned}$$

所以最优的 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$不依赖于 $w$. (对于 $U(x)=\log(x)$的讨论留作练习，请读者自己证明.)

近似计算准则(9-5)的一个重要的特征是，当 $U(x)=x^a(0<a<1)$时，最大化表达式(9-5)的投资组合也具有这种性质：投资到每个证券的财富比例不依赖于 $w$. 由式(9-2)、式(9-3)看到，对于组合 $w_i=\alpha_i w(i=1, 2, \cdots, n)$，

$$E[W]=wA, \quad \mathrm{Var}(W)=w^2B,$$

其中

$$A = 1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i r_i,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\alpha_i\alpha_j c(i,j).$$

这样，由于

$$U''(x) = a(a-1)x^{a-2},$$

我们得到：

$$\begin{aligned}&U(E[W])+U''(E[W])\mathrm{Var}(W)/2\\ &= w^aA^a + a(a-1)w^{a-2}A^{a-2}w^2B/2\\ &= w^a[A^a + a(a-1)A^{a-2}B/2].\end{aligned}$$

167

故当表达式(9-5)的值达到最大时投资比例不依赖于 $w$.

**例 9.3c** 再次考虑例 9.3a，但将效用函数改为：

$$U(x)=\sqrt{x}.$$

令 $\alpha_1=\alpha$，$\alpha_2=1-\alpha$，我们有

$$A = 1+0.15\alpha+0.18(1-\alpha),$$

$$B = 0.04\alpha^2 + 0.0625(1-\alpha)^2 - 2(0.02)\alpha(1-\alpha),$$

现在我们必须求出 $\alpha$ 的值，使下式的值达到最大：

$$f(\alpha) = A^{1/2} - A^{-3/2}B/8.$$

令上式的导数等于0，使用数值方法解相应方程便可得到所要的结果. □

现假定我们可以进行正的或负的投资，且投资所需资金均通过借款获得，借款利率每期固定为 $r$. 设 $w_i$ 是对投资 $i$ 的投入($i=1, \cdots, n$)，则一期后此投资组合的收益为：

$$R(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(1+R_i) - (1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(R_i - r).$$

(如果 $s = \sum_i w_i$，则 $s>0$ 表示从银行借入，$s<0$ 表示存入银行 $-s$.)令：

$$r(\boldsymbol{w}) = E[R(\boldsymbol{w})], \quad V(\boldsymbol{w}) = \mathrm{Var}(R(\boldsymbol{w}))$$

注意到

$$r(a\boldsymbol{w}) = ar(\boldsymbol{w}), \quad V(a\boldsymbol{w}) = a^2V(\boldsymbol{w}),$$

其中 $a\boldsymbol{w}=(aw_1, \cdots, aw_n)$. 设 $\boldsymbol{w}^*$ 满足 $r(\boldsymbol{w}^*)=1$，且

$$V(\boldsymbol{w}^*) = \min_{\boldsymbol{w}: r(\boldsymbol{w})=1} V(\boldsymbol{w}).$$

168 即，在所有期望回报为1的投资组合 $\boldsymbol{w}$ 中，组合回报的方差在 $\boldsymbol{w}^*$ 达到最小.

我们现在来证明：对任意 $b>0$，在所有期望回报为 $b$ 的组合中，$b\boldsymbol{w}^*$ 使投资回报方差最小.

为证明这一点，设 $r(\boldsymbol{y})=b$，则：

$$r\left(\frac{1}{b}\boldsymbol{y}\right) = \frac{1}{b}r(\boldsymbol{y}) = 1,$$

这意味着(由 $\boldsymbol{w}^*$ 的定义)：

$$V(b\boldsymbol{w}^*) = b^2V(\boldsymbol{w}^*) \leqslant b^2V\left(\frac{1}{b}\boldsymbol{y}\right) = V(\boldsymbol{y}),$$

这样就证明了上面的结论. 因此，使回报方差最小的组合等于一个特定组合的常数倍. 这一性质称为投资组合分离定理. 因为当从均方差观点来分析投资组合最优化问题时，此定理使我们将投资组合最优化问题分成下面两个问题：确定每种投资的投资比例和选择上述的倍数.

## 协方差估计

为了构造一个好的投资组合，我们首先用历史数据估计对所有 $i$，$j$，$r_i=E[R_i]$，$v_i^2=\mathrm{Var}(R_i)$，$c(i, j)=\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$等的值. 均值 $r_i$ 和方差 $v_i^2$ 的值可以利用8.5节的方法，即用证券 $i$ 历史回报率的样本均值和样本方差估计分别估计它们. 为了估计协方差 $c(i, j)$(固定的 $i$，$j$)，设已知 $m$ 期的历史数据，$r_{i,k}$，$r_{j,k}$分别表示证券 $i$ 和证券 $j$ 在第 $k$ 期的回报率，$k=1, \cdots, m$. 那么

$$\mathrm{Cov}(R_i,R_j)=E[(R_i-r_i)(R_j-r_j)]$$

的常用估计量是

$$\frac{\sum_{k=1}^{m}(r_{i,k}-\bar{r}_i)(r_{j,k}-\bar{r}_j)}{m-1},$$

其中 $\bar{r}_i$，$\bar{r}_j$ 是样本均值

$$\bar{r}_i=\frac{\sum_{k=1}^{m}r_{i,k}}{m},\quad \bar{r}_j=\frac{\sum_{k=1}^{m}r_{j,k}}{m}.$$

169

## 9.4 风险价值和条件风险价值

设 $G$ 表示一项投资收益的现值(如果该投资要求的初始投入为 $c$，一期后的回报为 $X$，则 $G=\frac{X}{1+r}-c$). 一项投资的风险价值(Value at risk，VAR)是这样一个数值 $v$，它表示仅有 1%的机会使得投资损失大于 $v$. 由于 $-G$ 为投资损失，因此风险价值 $v$ 是满足下式的实数：

$$P\{-G>v\}=0.01.$$

从不同类型的投资中选择具有最小 VAR 的投资，亦称 VAR 准则，这种方法近年来比较盛行.

**例 9.4a** 设投资收益 $G$ 是均值为 $\mu$，标准差为 $\sigma$ 的正态随机变量，故 $-G$ 是均值为 $-\mu$，标准差为 $\sigma$ 的正态随机变量，所以此投资的 VAR 值为：

$$\begin{aligned}0.01&=P\{-G>v\}\\&=P\left\{\frac{-G+\mu}{\sigma}>\frac{v+\mu}{\sigma}\right\}\\&=P\left\{Z>\frac{v+\mu}{\sigma}\right\},\end{aligned}$$

其中 $Z$ 是标准正态随机变量. 从表 2-1 可以得到 $P\{Z>2.33\}=0.01$. 因此，

$$2.33=\frac{v+\mu}{\sigma}$$

或

$$\mathrm{VAR}=-\mu+2.33\sigma.$$

所以，在收益服从正态分布的投资中，VAR 准则将选择使 $\mu-2.33\sigma$ 的值最大的投资. □

**注** 用来定义 VAR 的临界值 0.01 用得较多，原因是它设定了一个不太

[170] 可能超出的损失上界．但也有的投资者在运用 VAR 准则时使用其他的临界值．

VAR 给出了这样一个值，只有 1% 的机会使投资损失大于这个值．然而，代替选择具有最小 VAR 的投资，有人认为考虑在已知损失大于 VAR 值情况下的条件期望损失更好．换句话说，如果概率为 1% 的事件发生了，出现了大的损失，则损失量是大于 VAR 的一个值．已知损失超过 VAR 值情况下的期望损失称为条件风险价值(conditional value at risk，CVAR)．CVAR 准则就是选择 CVAR 值最小的投资．

**例 9.4b** 设一项投资的收益 $G$ 是均值为 $\mu$，标准差为 $\sigma$ 的正态随机变量，那么 CVAR 值为：

$$\begin{aligned}\text{CVAR} &= E[-G \mid -G > \text{VAR}] \\ &= E[-G \mid -G > -\mu + 2.33\sigma] \\ &= E\left[-G \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] \\ &= E\left[\sigma\left(\frac{-G+\mu}{\sigma}\right) - \mu \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] \\ &= \sigma E\left[\frac{-G+\mu}{\sigma} \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] - \mu \\ &= \sigma E[Z \mid Z > 2.33] - \mu,\end{aligned}$$

其中 $Z$ 是标准正态的．容易证明，对于标准正态随机变量 $Z$，

$$E[Z \mid Z > a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} P\{Z \geqslant a\}} e^{-a^2/2};$$

故

[171]
$$\text{CVAR} = \sigma \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(2.33)^2/2\} - \mu = 2.64\sigma - \mu.$$

因此，CVAR 准则要求 $\mu - 2.64\sigma$ 最大化，它比 VAR 准则给了方差稍大一些的权重． □

## 9.5 资本资产定价模型

资本资产定价模型(Capital Assets Pricing Model，CAPM)试图建立给定证券 $i$ 的单期回报率 $R_i$ 与市场单期回报率 $R_m$(可以用像标准普尔 500 股票指数这样的指标度量)的关系．设 $r_f$ 为无风险利率(通常取美国短期国债的当前利率)，该模型指出，对于某常数 $\beta_i$，有

$$R_i = r_f + \beta_i(R_m - r_f) + e_i,$$

其中 $e_i$ 是均值为 0 的正态随机变量，它独立于 $R_m$．设 $R_i$ 和 $R_m$ 的期望值分别为

$r_i$ 和 $r_m$. 在 CAPM 模型(设 $r_f$ 为常数)中它们有下面的关系：

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

或等价地，

$$r_i - r_f = \beta_i(r_m - r_f).$$

即证券 $i$ 的期望回报率与无风险利率间的差值等于 $\beta_i$ 乘以市场期望回报率与无风险利率间的差值. 如果 $\beta_i=1$(或 1/2 或 2)，则证券 $i$ 的回报率超过 $r_f$ 部分的期望值等于(或一半于或 2 倍于)市场回报率高于 $r_f$ 的那部分期望值. $\beta_i$ 称为证券 $i$ 的 $\beta$ 值.

利用协方差的线性性质以及任意随机变量与常数的协方差均为 0 的性质，可以得到在 CAPM 下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(R_i, R_m) &= \beta_i \mathrm{Cov}(R_m, R_m) + \mathrm{Cov}(e_i, R_m) \\ &= \beta_i \mathrm{Var}(R_m) \quad (\text{由于 } e_i \text{ 和 } R_m \text{ 是无关的}).\end{aligned}$$

[172]

因此，令 $v_m^2=\mathrm{Var}(R_m)$得

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_m)}{v_m^2}.$$

**例 9.5a** 设当前无风险利率为 6%，市场回报率的均值和标准差分别为 0.10，0.20. 如果给定股票的回报率与市场回报率的协方差为 0.05，求该股票回报率的期望值.

**解**：由于

$$\beta = \frac{0.05}{(0.20)^2} = 1.25,$$

所以(假定 CAPM 模型有效)

$$r_i = 0.06 + 1.25(0.10 - 0.06) = 0.11.$$

即股票的期望回报率为 11%. □

如果我们令 $v_i^2=\mathrm{Var}(R_i)$，利用 $e_i$ 和 $R_m$ 的独立性，在 CAPM 下有

$$v_i^2 = \beta_i^2 v_m^2 + \mathrm{Var}(e_i).$$

如果我们用证券回报率的方差代表该证券的风险，则上述等式说明证券的风险包括两项：第一项 $\beta_i^2 v_m^2$，称为系统风险，它是由证券的 $\beta$ 值和市场潜在风险结合产生的；第二项 $\mathrm{Var}(e_i)$，称为个体风险，它来自所考虑的股票本身.

## 9.6 买入期权风险中性定价的均方差分析

[173]

设一给定证券的价格服从参数为 $\mu$，$\sigma$ 的几何布朗运动，$r$ 为利率，$\mu \neq r-\sigma^2/2$，该证券初始价格为 $s$. 进一步假设该证券买入期权的执行价为 $K$，到期日为 $t$，当前价格是 $C$，其中 $C$ 由 Black-Scholes 公式给出. 那么虽然不能保证一定获利，但仍然可以进行这样的投资：它的收益具有正的期望值和较小的方差.

首先，假设在 0 时刻我们购买 $x_1$ 个单位的证券和 $x_2$ 个单位的期权，总花费为$sx_1+Cx_2$. 如果我们在 $t$ 时刻结束投资，则收益的现值为：

$$P=\mathrm{e}^{-rt}(x_1S(t)+x_2(S(t)-K)^+)-x_1s-x_2C.$$

为计算 $E[P]$和 $\mathrm{Var}(P)$，令

$$d=\frac{\mu t-\log(K/s)}{\sigma\sqrt{t}}$$

并记

$$F(b)=\exp\{b\mu t+b^2\sigma^2t/2\}\Phi(b\sigma\sqrt{t}+d),$$

其中 $\Phi$ 是标准正态分布函数. 现在，我们设

$$\begin{aligned}A&=sF(1)-KF(0),\\B&=s^2F(2)-KsF(1),\\D&=s^2F(2)-2KsF(1)+K^2F(0),\\E&=s\exp\{\mu t+t\sigma^2/2\},\\G&=s^2\exp\{2\mu t+2t\sigma^2\}.\end{aligned}$$

可以证明

$$\begin{aligned}A&=E[(S(t)-K)^+],\\B&=E[S(t)(S(t)-K)^+],\\D&=E[((S(t)-K)^+)^2],\\E&=E[S(t)],\\G&=E[S^2(t)].\end{aligned}$$

由此知

[174]

$$E[P]=\mathrm{e}^{-rt}(x_1E+x_2A)-x_1s-x_2C \tag{9-6}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(P)&=\mathrm{e}^{-2rt}\mathrm{Var}(x_1S(t)+x_2(S(t)-K)^+)\\&=\mathrm{e}^{-2rt}(E[(x_1S(t)+x_2(S(t)-K)^+)^2]\\&\quad-E^2[x_1S(t)+x_2(S(t)-K)^+])\\&=\mathrm{e}^{-2rt}(x_1^2G+x_2^2D+2x_1x_2B-(x_1E+x_2A)^2).\end{aligned} \tag{9-7}$$

我们现在可以对不同的 $x_1$，$x_2$ 进行试验，但这些值必须满足一个是正值另一个是负值. 式(9-6) 和式(9-7)可被用来确定所要的均值和方差. 如果能找到这样的 $x_i$，它们给出正的期望收益和可以接受的比较小的方差，那么就可进行风险相对小的投资.

**例 9.6a** 考虑购买一个证券的买入期权，它 5 个月后到期，执行价为 60，证券的当前价格是 $s=62$，该证券的年波动率为 0.20，利率为 10%. 并假定买入

期权以 Black-Scholes 公式下的价格 $C=5.80$ 出售. 如果设证券价格过程是几何布朗运动，其漂移参数 $\mu=0.10$，则由于

$$0.10 > 0.10-(0.2)^2/2=0.08,$$

所以(基于你的估价)此证券和以它为标的的买入期权均有正的当前收益. 沿用本节前面的记号，我们有

$$d=0.5767,\quad A=6.4502,\quad B=476.1476,$$
$$D=89.0516,\quad E=65.1788,\quad G=4319.387.$$

最后，由式(9-6)、式(9-7)得

$$E[P]=0.5188x_1+0.3870x_2,$$
$$\mathrm{Var}(P)=65.4253x_1^2+43.6529x_2^2+102.5505x_1x_2.$$

因此，如果买一股股票，则收益现值的期望是 0.52 美元，标准差是 8.09 美元. 另一方面，如果你购买一个买入期权，则收益现值的期望是 0.39 美元，标准差是 6.61 美元. 因为买 0.746 个证券的收益现值期望是 0.39 美元，标准差是 6.04 美元，所以买股票优于买期权(在均值意义上). 但是若令 175

$$x_1=\frac{1-0.3870x_2}{0.5188}.$$

可以看到收益现值的期望值是 1. 如果我们选择使 Var(P)最小的 $x_2$，则问题的解为

$$x_1=2.93,\quad x_2=-1.34,$$

这导致

$$\sqrt{\mathrm{Var}(P)}=15.38.$$

(比较一下，买 1/0.52 股股票的收益现值期望是 1，但标准差是 8.09/0.52＝15.56.)因此，最优投资策略(准则是：对指定的期望收益最小化方差)是每购买 2.93 股股票，卖出 1.34 个买入期权(或等价地，每购买 1 股股票卖出 1.34/2.93≈0.46 个期权). □

## 9.7 回报率：单时期和几何布朗运动

设 $S_i(t)$ 为证券 $i$ 在 $t(t\geqslant 0)$ 时刻的价格，并设此价格过程是漂移参数为 $\mu_i$，波动参数为 $\sigma_i$ 的几何布朗运动. $R_i$ 是证券 $i$ 的单期回报率，则：

$$\frac{S_i(1)}{1+R_i}=S_i(0)$$

或等价地，

$$R_i=\frac{S_i(1)}{S_i(0)}-1.$$

由于 $S_i(1)/S_i(0)$ 和 $e^X$ 具有相同的概率分布，其中 $X$ 是均值为 $\mu_i$，方差是 $\sigma_i^2$ 的正态随机变量，所以有：

$$
\begin{aligned}
r_i = E[R_i] &= E\left[\frac{S_i(1)}{S_i(0)}\right]-1 \\
&= E[e^X]-1 \\
&= \exp\{\mu_i+\sigma_i^2/2\}-1.
\end{aligned}
$$

176

而且，

$$
\begin{aligned}
v_i^2 = \mathrm{Var}(R_i) &= \mathrm{Var}\left(\frac{S_i(1)}{S_i(0)}\right) \\
&= \mathrm{Var}(e^X) \\
&= E[e^{2X}]-(E[e^X])^2 \\
&= \exp\{2\mu_i+2\sigma_i^2\}-(\exp\{\mu_i+\sigma_i^2/2\})^2 \\
&= \exp\{2\mu_i+2\sigma_i^2\}-\exp\{2\mu_i+\sigma_i^2\},
\end{aligned}
$$

这里为确定 $E[e^{2X}]$，上式中倒数第二个等式用到 $2X$ 是均值为 $2\mu_i$，方差是 $4\sigma_i^2$ 的正态随机变量.

于是证券 $i$ 的单期期望回报率是 $\exp\{\mu_i+\sigma_i^2/2\}-1$；注意它与时刻 1 的平均即期收益率的期望值是不相等的. 因为如果我们用 $\bar{R}_i(t)$ 表示 $t$ 时刻即期回报率的平均值(即收益曲线)，那么

$$
\frac{S_i(t)}{S_i(0)} = e^{t\bar{R}_i(t)},
$$

这意味着

$$
\bar{R}_i(t) = \frac{1}{t}\log\left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)}\right).
$$

由于 $\log(S_i(t)/S_i(0))$ 是均值为 $\mu_i t$，方差是 $\sigma_i^2 t$ 的正态随机变量，所以 $\bar{R}_i(t)$ 也是正态随机变量，其均值和方差如下：

$$
E[\bar{R}_i(t)] = \mu_i, \quad \mathrm{Var}(\bar{R}_i(t)) = \sigma_i^2/t.
$$

因此，几何布朗运动的单期收益函数的期望值和方差也是几何布朗运动本身的参数 $\mu_i$ 和 $\sigma_i^2$.

## 9.8 习题

**练习 9.1** 在例 9.1a 中，设在时刻 1 的证券价格可能为 50，175，200，求无套利期权价格的范围. 由此能得到什么结论？

177

**练习 9.2** 风险厌恶的程度可用效用函数 $u(x)$ 定义为：

$$
a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},
$$

其中 $u'$，$u''$分别是 $u$ 的一阶、二阶导数，$a(x)$称为 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数. 对下列函数 $u$ 分别计算此系数.

a) $u(x)=\log(x)$；

b) $u(x)=1-e^{-x}$.

**练习 9.3** 对例 9.2a 证明：若 $p\leqslant 1/2$，则最优投资额为 0.

**练习 9.4** 在例 9.2b 中，证明：若 $p\leqslant 1/2$，则最优投资额为 0.

**练习 9.5** 在例 9.3a 中，令 $\rho=0$，求最优投资组合.

**练习 9.6** 在例 9.3a 中，令 $r_1=0.16$. 确定最大期望效用，并与下面两种情况进行比较：

a)将所有资本投入到证券 1 的期望效用；

b)将所有资本投入到证券 2 的期望效用.

**练习 9.7** 证明最大化 $E[\log(W)]$时，需要投资到各证券的财富比例不依赖于初始财富的数量.

**练习 9.8** 证明 $U''(x)$关于 $x$ 非减，如果 $x>0$ 且

a) $U(x)=x^a(0<a<1)$；

b) $U(x)=1-e^{-bx}$，$b>0$；

c) $U(x)=\log(x)$.

**练习 9.9** 如果 $U(x)=\log(x)$，最大化近似式(9-5)时投资到每个证券的财富比例依赖于初始财富的数量吗？

**练习 9.10** 利用式(9-5)给出的关于 $E[U(W)]$的近似，确定例 9.3a 中投资到每个证券的最优数量，其中效用函数为 $U(x)=1-e^{-0.005x}$，并与该例中获得的结果进行比较. 178

**练习 9.11** 我们想选择一个投资组合，以使单期期末的财富值 $W$ 不小于 $g$ 这一事件的概率达到最大，其中 $g>w$. $w$ 为初始财富. 设 $W$ 是正态的，那么最优投资组合将极大化 $E[W]$和 $\mathrm{Var}(W)$的什么函数？

**练习 9.12** 求例 9.3a 中的最优组合，假设你的目标是，在正态假设下使期末财富不少于下列各值的概率达到最大：

a) 110； b) 115； c) 120； d) 125 .

**练习 9.13** 求例 9.3c 的解.

**练习 9.14** 如果一股股票的 $\beta$ 值等于 0.80，市场回报率的期望值为 0.07，无风险利率为 5%，求这股股票的期望收益率. 如果将无风险利率改为 10%，股票的期望收益率又是多少？假设 CAPM 模型有效.

**练习 9.15** 设股票 $i(i=1,\cdots,k)$的 $\beta$ 值为 $\beta_i$，若一个投资组合中购买股票 $i$ 的资本比例是 $\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，求该组合的 $\beta$ 值.

**练习 9.16** 一个单因素模型是：证券的单期回报率 $R_i$ 具有下面的表达式：

$$R_i=a_i+b_iF+e_i,$$

其中 $F$ 是随机变量(称为因素)，$e_i$ 是均值为 0 的正态随机变量，独立于 $F$，$a_i$，$b_i$ 是常数，它们依赖于该证券. 证明 CAPM 是单因素模型，并求 $a_i$，$b_i$，$F$.

**练习 9.17** 在例 9.6a 中，求下列投资组合收益的期望值和标准差：

a)购买 3 股证券和 −2 个期权；

179 b)购买 3 个期权和 −2 个证券.

## 参考文献

文献[2]、[3]、[5]是有关效用理论的.


[1] Breiman, L. (1960). "Investment Policies for Expanding Businesses Optimal in a Long Run Sense." *Naval Research Logistics Quarterly* 7: 647−51.

[2] Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield.

[3] Pratt, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica* 32: 122−30.

[4] Thorp, E. O. (1975). "Portfolio Choice and the Kelly Criterion." In W. T. Ziemba and R. G. Vickson (Eds), *Stochastic Optimization Models in Finance*. New York: Academic Press.

[5] von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.


180

# 第10章　最优化模型

## 10.1　引言

本章中，我们将涉及一些单期投资的最优化问题，这些投资并不一定和公开交易证券的价格变化有关．10.2节引入一个确定性最优化问题，其目的是要确定一个有效的算法，使得当将固定数量的资金整体地投资到 $n$ 个具有不同回报函数的项目时，可以找到最优投资策略．10.2.1节提出了一种动态规划算法，用它可以解决上面提到的问题；10.2.2节给出了当所有回报函数都是凹函数时的一个更为有效的算法；10.2.3节分析了一种称为背包问题的特殊情形，在这种情况下，项目投资可通过购买整数股份来实现，且每个项目的回报都是所购买股数的线性函数．10.3节中考虑概率起关键作用的一类模型．10.3.1节讨论输赢概率未知的赌博模型；10.3.2节讨论投资机会的次数为随机时的顺序投资分配模型．

## 10.2　确定性最优化模型

假设将 $m$ 美元投资到 $n$ 个项目，在项目 $i$ 中投资 $x$ 可以得到回报（现值），$f_i(x)$，$i=1$，…，$n$．要考虑的问题是，如何确定投资到每一个项目中的整数金额以使得回报的总和达到最大．这就是说，如果令 $x_i$ 表示投资到项目 $i$ 中的资金，那么这个问题数学上表示为：

$$\text{选择非负整数 } x_1,\cdots,x_n$$

$$\text{满足} \sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$\text{使得} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \text{ 达到最大}$$



### 10.2.1　基于动态规划的一般解法

为解决前面提出的问题，令 $V_j(x)$ 表示当项目1，…，$j$ 的总投资为 $x$ 时，可能得到的最大总回报，$V_n(m)$ 代表在10.2节中提出的问题的最大值．首先对于 $j=1$，进而对于 $j=2$，直至最终对 $j=n$，寻找当 $x=1$，…，$m$ 时 $V_j(x)$ 的值，以决定 $V_n(m)$ 和最优投资金额．

因为当 $x$ 全部投资到项目1时最大回报是 $f_1(x)$，我们有：

$$V_1(x) = f_1(x).$$

现在假设 $x$ 必须投资到项目1和项目2之中．如果我们在项目2中投资 $y$，那么所剩的全部金额 $x-y$ 可以投资到项目1中．因为 $x-y$ 投资到项目1中的最

大回报是 $V_1(x-y)$，所以当金额 $y$ 投资到项目 2 时，可能的最大回报总和是 $f_2(y)+V_1(x-y)$. 由于可能的最大回报是通过对 $y$ 取上面式子的最大值，因而得到

$$V_2(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_2(y)+V_1(x-y)\}.$$

一般地，假设 $x$ 必须投资到项目 1，…，$j$ 中. 如果我们投资 $y$ 到项目 $j$ 中，那么所剩的全部 $x-y$ 可以投资到项目 1，…，$j-1$ 中. 因为将 $x-y$ 投资到项目 1，…，$j-1$ 中的最大回报是 $V_{j-1}(x-y)$，那么当金额 $y$ 投资到项目 $j$ 时，可能的最大回报总和是 $f_j(y)+V_{j-1}(x-y)$. 由于可能的最大回报是通过对 $y$ 取上面式子的最大值，因此得到

$$V_j(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_j(y)+V_{j-1}(x-y)\}.$$

如果令 $y_j(x)$ 表示使得上式右侧最大化的 $y$ 值(或者多个值之中的一个)，那么 $y_j(x)$ 就是将 $x$ 投资到项目 1，…，$j$ 中时，在项目 $j$ 中投资的最佳金额.

$V_n(m)$ 的值可以通过首先确定 $V_1(x)$，然后依次确定 $V_2(x)$，$V_3(x)$，…，$V_{n-1}(x)$，进而最终确定 $V_n(m)$ 来得到. 投资到项目 $n$ 中的最佳投资金额由 $y_n(m)$ 给出；投资到项目 $n-1$ 中的最佳投资金额由 $y_{n-1}(m-y_n(m))$ 给出；依此类推.

182

将问题视为 $n$ 个顺序决策，首先研究最后决策的最优值，再分析其前一个的最优值，并依此类推以分析整个问题的方法，称为**动态规划法**.（在前面 8.3 节中，我们利用过动态规划法来给美式卖出期权定价，并用它找到了这种期权的一个最佳执行策略.）

**例 10.2a** 假设三个投资项目分别有以下的回报函数：

$$f_1(x)=\frac{10x}{1+x},\quad x=0,1,\cdots,$$

$$f_2(x)=\sqrt{x},\quad x=0,1,\cdots,$$

$$f_3(x)=10(1-e^{-x}),\quad x=0,1,\cdots,$$

有 5 单位资金可以用来投资，要确定其最大的投资回报. 现在，

$$V_1(x)=f_1(x)=\frac{10x}{1+x},\quad y_1(x)=x.$$

因为

$$V_2(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_2(y)+V_1(x-y)\}=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\left\{\sqrt{y}+\frac{10(x-y)}{1+x-y}\right\},$$

我们发现

$$V_2(1)=\max\{10/2,1\}=5,\quad y_2(1)=0,$$

$$V_2(2)=\max\{20/3,1+5,\sqrt{2}\}=20/3,\quad y_2(2)=0,$$

$V_2(3)=\max\{30/4,1+20/3,\sqrt{2}+5,\sqrt{3}\}=23/3,\quad y_2(3)=1,$

$V_2(4)=\max\{40/5,1+30/4,\sqrt{2}+20/3,\sqrt{3}+5,\sqrt{4}\}=8.5,\quad y_2(4)=1,$

$V_2(5)=\max\{50/6,1+8,\sqrt{2}+7.5,\sqrt{3}+20/3,\sqrt{4}+5,\sqrt{5}\}=9,\quad y_2(5)=1.$

继续计算可以得到 183

$$V_3(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_3(y)+V_2(x-y)\}=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10(1-e^{-y})+V_2(x-y)\}.$$

利用

$$1-e^{-1}=0.632,\quad 1-e^{-2}=0.865,\quad 1-e^{-3}=0.950,$$
$$1-e^{-4}=0.982,\quad 1-e^{-5}=0.993,$$

我们有

$$V_3(5)=\max\{9,6.32+8.5,8.65+23/3,$$
$$9.50+20/3,9.82+5,9.93\}=16.32,$$
$$y_3(5)=2.$$

这样，投资 5 个单位金额可以得到的最大回报总和为 16.32；投资到项目 3 中的最佳投资金额为 $y_3(5)=2$；投资到项目 2 中的最佳投资金额为 $y_2(3)=1$；而投资到项目 1 中的最佳投资金额为 $y_1(2)=2$. □

### 10.2.2 凹回报函数的解法

当回报函数满足特定条件时，可以找到更为有效的算法来解决前面提到的问题. 例如，假设每一个函数 $f_i(x)$ 都是凹函数. 这里，我们称函数 $g(i)$，$i=0$，1，…是凹的，如果它满足

$$g(i+1)-g(i)\ \text{对于}\ i\ \text{是非增的}$$

这就是说，如果从每一个额外的单位投资中得到的收益(或称边际收益)随着我们投资的金额变多而减小，那么回报函数就是凹的.

假设所有的函数 $f_i(x)$，$i=1$，…，$n$ 都是凹的，再一次考虑前面提到的问题，选择非负的整数 $x_1$，…，$x_n$，其和为 $m$，使得 $\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)$ 达到最大. 假设 $x_1^o$，…，$x_n^o$ 是这个问题的最优解向量：它们是和为 $m$ 的非负整数向量，满足

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i^o)=\max\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i),$$ 184

上式是对所有和为 $m$ 的非负整数 $x_1$，…，$x_n$ 取最大值. 现在假设有金额 $m+1$ 可以用来投资. 下面我们要证明，存在一个最优的向量 $y_1^o,\cdots,y_n^o,\sum_{i=1}^{n}y_i^o=m+1$，满足

$$y_i^o\geqslant x_i^o,\quad i=1,\cdots,n. \tag{10-1}$$

为了证明式(10-1)，假设我们有金额 $m+1$ 可以用来投资，考虑投资策略 $y_1$，…，$y_n$，设其满足 $\sum_{i=1}^{n} y_i = m+1$ 且对于某个 $k$ 值，有

$$y_k < x_k^o.$$

因为 $m+1 = \sum_i y_i > \sum_i x_i^o = m$，所以一定存在 $j$ 满足

$$x_j^o < y_j.$$

现在要证明，当有金额 $m+1$ 可以投资时，投资 $y_k+1$ 于项目 $k$ 中，$y_j-1$ 于项目 $j$ 中，$y_i$ 于项目 $i(i\neq k$ 或 $j)$中的投资策略至少和对于每个 $i$，投资 $y_i$ 于项目 $i$ 中的投资策略一样好. 为了证明这个新的投资策略至少和原来的 $y$ 策略一样好，我们需要证明

$$f_k(y_k+1)+f_j(y_j-1) \geqslant f_k(y_k)+f_j(y_j)$$

或者，等价地，证明

$$f_k(y_k+1)-f_k(y_k) \geqslant f_j(y_j)-f_j(y_j-1). \tag{10-2}$$

因为当有金额 $m$ 可以用来投资时，$x_1^o$，…，$x_n^o$ 是最优的投资额，因此有

$$f_k(x_k^o)+f_j(x_j^o) \geqslant f_k(x_k^o-1)+f_j(x_j^o+1)$$

或者，等价地，有

$$f_k(x_k^o)-f_k(x_k^o-1) \geqslant f_j(x_j^o+1)-f_j(x_j^o). \tag{10-3}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&f_k(y_k+1)-f_k(y_k)\\
&\geqslant f_k(x_k^o)-f_k(x_k^o-1) \quad (\text{由函数的凹性,因为 } y_k+1\leqslant x_k^o)\\
&\geqslant f_j(x_j^o+1)-f_j(x_j^o) \quad (\text{由式(10-3)})\\
&\geqslant f_j(y_j)-f_j(y_j-1) \quad (\text{由函数的凹性,因为 } x_j^o+1\leqslant y_j).
\end{aligned}$$

185

这样，我们就证明了不等式(10-2). 这个不等式是说，任何一个投资金额为 $m+1$、而要求在某一个项目 $k$ 中投资额少于 $x_k^o$ 的投资策略，都至少和以下的投资策略相当：在项目 $k$ 中的投资额增加 1，而在某个投资额大于 $x_j^o$ 的项目 $j$ 中相应地减少 1. 重复这个论断可以得知，对于任意投资金额为 $m+1$ 的策略，我们都可以找到另外一个策略，对于所有的 $i=1$，…，$n$，在项目 $i$ 中至少投资 $x_i^o$，而回报至少和原来的投资策略相同. 但是这意味着对于投资金额为 $m+1$，我们可以找到最佳投资策略 $y_1^o$，…，$y_n^o$ 满足不等式(10-1).

因为投资金额为 $m+1$ 的最优策略至少在每个项目中的投资额都和投资金额为 $m$ 的最优策略是相同的，因此投资金额为 $m+1$ 的最优策略可以通过利用投资金额为 $m$ 的最优策略，并将额外的 1 美元投资于边际增长最大的那个项目来得到. 所以，投资金额为 $m$ 的最优策略，可以首先解决投资金额只有 1 的情况，进

而研究金额为 2 的情况，再研究金额为 3 的情况，并依此类推.

**例 10.2b** 重新考虑例 10.2a，其中有金额 5 用来投资于三个项目中，这三个项目的回报函数分别为

$$f_1(x) = \frac{10x}{1+x},$$

$$f_2(x) = \sqrt{x},$$

$$f_3(x) = 10(1-e^{-x}).$$

令 $x_i(j)$ 表示将总量 $j$ 用来投资时，投资于项目 $i$ 的最佳金额. 因为

$$\max\{f_1(1), f_2(1), f_3(1)\} = \max\{5, 1, 6.32\} = 6.32,$$

我们发现，

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 0, \quad x_3(1) = 1.$$

由

$$\max_i\{f_i(x_i(1)+1) - f_i(x_i(1))\} = \max\{5, 1, 8.65 - 6.32\} = 5,$$

有

186

$$x_1(2) = 1, \quad x_2(2) = 0, \quad x_3(2) = 1.$$

因为

$$\max_i\{f_i(x_i(2)+1) - f_i(x_i(2))\} = \max\{20/3 - 5, 1, 8.65 - 6.32\} = 2.33,$$

所以

$$x_1(3) = 1, \quad x_2(3) = 0, \quad x_3(3) = 2.$$

现在从

$$\max_i\{f_i(x_i(3)+1) - f_i(x_i(3))\} = \max\{20/3 - 5, 1, 9.50 - 8.65\} = 1.67,$$

得到

$$x_1(4) = 2, \quad x_2(4) = 0, \quad x_3(4) = 2.$$

最后由

$$\max_i\{f_i(x_i(4)+1) - f_i(x_i(4))\} = \max\{30/4 - 20/3, 1, 9.50 - 8.65\} = 1,$$

我们得出

$$x_1(5) = 2, \quad x_2(5) = 1, \quad x_3(5) = 2.$$

因此，最大回报为 6.32+5+2.33+1.67+1=16.32. □

下面的算法可以用来解决将金额 $m$ 投资到 $n$ 个项目中，并且每一个项目均具有凹的回报函数的情况. $k$ 代表当前待投资的总额，$x_i$ 代表金额 $k$ 用于投资时，投资到项目 $i$ 中的最佳投资额.

**算法**

1)置 $k=0$，$x_i=0$，$i=1$，…，$n$.

2)$m_i=f_i(x_i+1)-f_i(x_i)$，$i=1$，…，$n$.

3)$k=k+1$.

187

4)令 $J$ 满足 $m_J=\max_i m_i$.

5)如果 $J=j$，那么

$$x_j \to x_j+1,$$
$$m_j \to f_j(x_j+1)-f_j(x_j).$$

6)如果 $k<m$，返回步骤 3).

步骤 5)的意思是说，如果 $J$ 的值为 $j$，那么：a)$x_j$ 的值要增加 1；b) $m_j$ 的值需要重新设置使其等于下面两个数之差：在 1 加上 $x_j$ 的新值处所估计的 $f_j$ 和在 $x_j$ 处估计的 $f_j$.

### 10.2.3 背包问题

假设通过购买整数份额来投资于项目 $i$，每一份要投入 $c_i$，回报为 $v_i$. 如果令 $x_i$ 表示在项目 $i$ 中购买的份额数，那么当一个人最多可以在 $n$ 个项目中投资 $m$ 单位金额时，这个问题可以表述为：

$$\text{选择非负的整数 } x_1,\cdots,x_n$$
$$\text{满足} \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \leqslant m$$
$$\text{以使得} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \text{ 最大化}$$

我们使用动态规划的方法来解这个问题. 以 $V(x)$表示投资 $x$ 时所能得到的最大可能回报. 如果一开始购买了一份项目 $i$ 的股份，那么可以得到回报 $v_i$，并且剩下资金 $x-c_i$. 因为 $V(x-c_i)$是从金额 $x-c_i$ 中可能得到的最大回报，所以如果我们有资金 $x$，并且一开始购买了一份项目 $i$，那么我们可能得到的最大回报是：

$$\text{一开始购买一份项目 } i \text{ 的最大回报} = v_i + V(x-c_i)$$

因此，从投资资本 $x$ 中可以得到的最大回报 $V(x)$满足

$$V(x) = \max_{i:c_i \leqslant x}\{v_i + V(x-c_i)\}. \tag{10-4}$$

令 $i(x)$表示使得等式(10-4)右侧最大的 $i$ 的值. 那么，如果有资金 $x$，最佳的投资是购买一份项目 $i(x)$. 从下式开始：

188

$$V(1) = \max_{i:c_i \leqslant 1} v_i,$$

很容易确定 $V(1)$和 $i(1)$，再使用它们，并通过等式(10-4)来确定 $V(2)$和 $i(2)$，

依此类推.

**注**　这个问题之所以称为背包问题，是因为它在数学上等价于如何选择一组物品放进一个背包中去，该背包所能携带的总重量至多为 $m$，可选择物品的种类为 $n$ 种，每个物品 $i$ 具有重量 $c_i$，价值为 $v_i$.

**例 10.2c**　假设有资金 25 可以投资于三个项目中，这三个项目的成本和回报列于下表中：

| 项目 | 每份的成本 | 每份的回报 |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 7 |
| 2 | 9 | 12 |
| 3 | 15 | 22 |

那么，

$$V(x)=0,\quad x\leqslant 4,$$
$$V(x)=7,\quad i(x)=1,\quad x=5,6,7,8,$$
$$V(9)=\max\{7+V(4),12+V(0)\}=12,\quad i(9)=2,$$
$$V(x)=\max\{7+V(x-5),12+V(x-9)\}=14,$$
$$i(x)=1,\quad x=10,11,12,13,$$
$$V(14)=\max\{7+V(9),12+V(5)\}=19,\quad i(x)=1\text{ or }2,$$
$$V(15)=\max\{7+V(10),12+V(6),22+V(0)\}=22,\quad i(15)=3,$$
$$V(16)=\max\{7+V(11),12+V(7),22+V(1)\}=22,\quad i(16)=3,$$
$$V(17)=\max\{7+V(12),12+V(8),22+V(2)\}=22,\quad i(17)=3,$$
$$V(18)=\max\{7+V(13),12+V(9),22+V(3)\}=24,\quad i(18)=2,$$

等等. 举个例子，对于资金 18，最佳的投资策略是首先购买一份项目 $i(18)=2$，然后购买一份项目 $i(9)=2$. 这就是说，如果有资金 18，那么最佳的投资是购买两份项目 2，可以得到的回报总额为 24. □

189

## 10.3　概率最优化模型

在本节中，我们考虑两个本质上具有随机性的最优化问题. 10.3.1 节讨论了一个赌博模型，它曾被用来解释信息的价值. 10.3.2 节讨论当投资的机会数具有随机性时的投资分配问题.

### 10.3.1　具有不确定获胜概率的赌博模型

在例 9.2a 中，假设一项投资赚钱的概率 $p$ 是不固定的，它可以取以下三个值之一：$p_1=0.45$，$p_2=0.55$，$p_3=0.65$. 并且我们假设，$p$ 将以 1/4 的概率取

$p_1$，以 1/2 的概率取 $p_2$，以 1/4 的概率取 $p_3$. 如果一个投资者没有关于到底取哪一个 $p_i$ 的信息，那么她将把投资中赚钱的概率取为

$$p = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{4}p_3 = 0.55.$$

假定存在一个对数效用函数(如同在例 9.2a 中那样)，那么从该例子的结果可知，投资者将投资她全部财富的 $100(2p-1)=10\%$，而她最终财富的期望效用为

$$\log(x) + 0.55\log(1.1) + 0.45\log(0.9) = \log(x) + 0.0050 = \log(e^{0.0050}x),$$

其中，$x$ 是投资者的初始财富.

现在假设投资者在进行投资之前，已经知道哪一个 $p_i$ 是赚钱的概率. 如果 0.45 是该概率，那么投资者将不会投资，所以她的最终财富的条件期望效用为 $\log(x)$. 如果 0.55 是赚钱概率，那么投资者将像前面所说的那样进行投资，而她最终财富的条件期望效用为 $\log(x)+0.0050$. 最后，如果 0.65 是赚钱概率，那么投资者将会投资她全部财富的 30%，而她的最终财富的条件期望效用为

190

$$\log(x) + 0.65\log(1.3) + 0.35\log(0.7) = \log(x) + 0.0456.$$

因此，在投资前可以得到获胜概率 $p_i$ 信息的投资者的最终期望效用为

$$\frac{1}{4}\log(x) + \frac{1}{2}(\log(x) + 0.0050) + \frac{1}{4}(\log(x) + 0.0456)$$
$$= \log(x) + 0.0139 = \log(e^{0.0139}x).$$

### 10.3.2 投资分配模型

一个投资者可以用来投资的资金为 $D$. 设在 $N$ 个时刻中的每一时刻出现投资机会的概率均为 $p$，并且这些投资机会之间是相互独立的. 如果出现投资机会，投资者必须立即决定从她的剩余财富中拿出多少用于投资. 如果在一个机会中投资了 $y$，那么在该期末可获得回报 $R(y)$，这里 $R(y)$是 $y$ 的某个特定函数. 假定所投资的金额和从中所得到的回报都不能再用于以后的投资，需要讨论的问题就是要确定到底在每一个投资机会中投资多少，才可以使得投资者最终财富的期望价值达到最大. 投资者的最终财富是所有的投资回报加上未用于投资的那部分金额.

为了解决这个问题，令 $W_n(x)$表示当投资者可用来投资的资金为 $x$，并且有 $n$ 个投资机会时，可以得到的最大期望最终财富. 令 $V_n(x)$表示当投资者具有资金 $x$ 可以用来投资，有 $n$ 个投资时刻，并且眼前正好有一个机会时，可以得到的最大期望最终财富. 为了确定关于 $V_n(x)$的方程，注意到，如果一开始投资了 $y$，那么投资者的最大期望最终财富等于 $R(y)$，加上其在具有投资资金 $x-y$ 且有 $n-1$个投资时刻的投资中可以得到的最大期望值. 因为后者是 $W_{n-1}(x-y)$，所以当初始投资是 $y$ 时，最大期望最终财富是 $R(y)+W_{n-1}(x-y)$. 投资者可以选

择 $y$ 的值使得这个和最大，因此得到下面的公式：

$$V_n(x) = \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{R(y) + W_{n-1}(x-y)\}. \tag{10-5}$$

当投资者有 $x$ 可用来投资，并且前面还具有 $n$ 个时刻的情况下，要么出现一个机会，最大期望最终财富为 $V_n(x)$；要么机会并没有出现，而最大期望最终财富为 $W_{n-1}(x)$. 因为每一个机会都以概率 $p$ 出现，由此可以得到 [191]

$$W_n(x) = pV_n(x) + (1-p)W_{n-1}(x). \tag{10-6}$$

取 $W_0(x)=x$ 作为开始，对于所有的 $0\leqslant x\leqslant D$，首先利用式(10-5)得到 $V_1(x)$，并利用式(10-6)得到 $W_1(x)$，然后再利用式(10-5)得到 $V_2(x)$，再利用式(10-6)得到 $W_2(x)$，依此类推. 如果我们令 $y_n(x)$表示使得等式(10-5)的右侧最大的 $y$ 值，那么如果还剩下 $n$ 个时刻，现在正好有一个投资机会，并且当前的投资资金是 $x$ 时，我们最优的投资策略就是投资 $y_n(x)$.

**例 10.3a** 假设有金额 10 可用于投资，存在两个时刻，投资机会在每个时刻都可能以概率 $p=0.7$ 出现，并且

$$R(y) = y + 10\sqrt{y}.$$

找出最大期望最终财富和最优投资策略.

**解**：从 $W_0(x)=x$ 开始，式(10-5)给出

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{y + 10\sqrt{y} + x - y\} \\ &= x + \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10\sqrt{y}\} \\ &= x + 10\sqrt{x} \end{aligned}$$

和 $y_1(x)=x$. 于是，

$$W_1(x) = 0.7(x + 10\sqrt{x}) + 0.3x = x + 7\sqrt{x},$$

由此得出

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{y + 10\sqrt{y} + x - y + 7\sqrt{x-y}\} \\ &= x + \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10\sqrt{y} + 7\sqrt{x-y}\} \\ &= x + \sqrt{149x}, \end{aligned} \tag{10-7}$$

上面最后的等式以及下面的结果可通过简单的微积分计算获得：

$$y_2(x) = \frac{100}{149}x. \tag{10-8}$$

[192]

由前述结果得：

$$W_2(x) = 0.7(x + \sqrt{149x}) + 0.3(x + 7\sqrt{x}) = x + 0.7\sqrt{149x} + 2.1\sqrt{x}.$$

于是，若以 10 作为初始投资，最大期望最终财富为

$$W_2(10) = 10 + 0.7\sqrt{1490} + 2.1\sqrt{10} = 43.66.$$

因此，最优投资策略是：如果在一开始出现投资机会，投资 1 000/149 = 6.71；当在最后一刻又出现投资机会时，就再投资所剩的全部金额. □

如果 $R(y)$是非减的凹函数，那么可以得出下面的结论.

**定理 10.3.1** 如果 $R(y)$是非减的凹函数，那么

a)$V_n(x)$和 $W_n(x)$都是非减的凹函数；

b)$y_n(x)$是关于 $x$ 的非减函数；

c)$x-y_n(x)$是关于 $x$ 的非减函数；

d)$y_n(x)$是关于 $n$ 的非增函数.

b)和 c)的含义分别是，财富越多，用于投资的金额就应该越多，保留的财富也应越多. d)的含义是，投资次数越多，每次投资的数额应该越少.

## 10.4 习题

**练习 10.1** 有金额为 6 的资金可投资于两个项目中，每个项目的回报函数如下：

$$f_1(x) = 2\log(x+1), \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad x = 0,1,\cdots.$$

找出最优投资策略.

**练习 10.2** 在例 10.2a 中，当投资金额为 8 时，找出最优投资策略和最大回报. 请使用例 10.2a 中的方法.

193

**练习 10.3** 使用例 10.2b 中的方法解决上一题.

**练习 10.4** 函数 $g(i)$，$i=0$，1，…，称为是凸的，如果

$$g(i+1) - g(i) \text{ 关于 } i \text{ 是非减的}$$

请证明，如果所有的回报函数都是凸的，那么 10.2 节中的问题存在最优投资策略，即将全部资金投资于一个项目中.

**练习 10.5** 选择非负的整数 $x_1$，…，$x_n$，它们的和为 $m=kn$，使得下式最大化：

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

其中，$f(x)$是一个给定的函数，$f(0)=0$.

a)如果 $f(x)$是凹的，请证明最大值为 $nf(k)$.

b)如果 $f(x)$是凸的，请证明最大值为 $f(kn)$.

**练习 10.6** 继续完成例 10.2c，并找出当投资金额为 25 时的最优投资策略.

**练习 10.7** 从一定的初始财富开始，要求必须在随后的 $N$ 个时期中，确定

每个时期的投资数额和消费数额. 假定在一个时期中消费 $x$ 所能得到的效用为 $\sqrt{x}$，目标是使得在这 $N$ 个时间段中所得到的效用总和达到最大. 每期投资可以得到固定比例 $r$ 的回报. 用 $V_n(x)$ 表示当目前的财产为 $x$，还剩余 $n$ 个时间段时，可以得到的最大效用之和.

a) $V_1(x)$ 的值为多少?

b) 找出 $V_2(x)$.

c) 导出关于 $V_n(x)$ 的等式.

d) 当目前的财产为 $x$，并且还剩余 $n$ 个时间段时，最佳的投资额和消费额为多少?

**练习 10.8** 工人在时刻 0 开始处理 $n$ 个工作. 工作 $i$ 的处理时间为 $x_i$. 如果在时刻 $t$，完成工作 $i$，那么该工人可以得到回报 $R_i(t)$. 工作可以按任何顺序处理，其目的是使工人得到的回报最大化. 对于这些工作的任何一部分 $S$，令 $V(S)$ 表示当所有与 $S$ 无关的工作都已处理完毕时，完成工作 $S$ 所带来的最大回报. 例如，$V(\{1, 2, \cdots, n\})$ 即为可以得到的最大回报. [194]

a) 导出关于 $V(S)$ 的一个方程，将 $V(S)$ 与从 $S$ 的不同子集而计算出的 $V$ 值联系起来.

b) 请解释如何利用 a) 中结果来寻找最优策略.

**练习 10.9** 投资者必须在两个可能的投资中作出选择. 在第一个投资中，必须冒险决定投资数额，并且会以 0.6 的概率赢得这些数额或者以 0.4 的概率失掉它. 在第二个投资中，赢的概率是 70% 的可能性为 0.4，是 30% 的可能性为 0.8. 虽然投资者在了解到第二个投资的获胜概率之前就必须作出投资决定，但是如果一旦选择了第二个投资，在决定投资数额之前，她就可以知道获胜概率. 如果具有对数效用函数，她应该选择哪一个投资，而投资的数额又应该为多少?

**练习 10.10** 证明式(10-7)和式(10-8). [195]





# 第11章　奇异期权

## 11.1　引言

到目前为止，我们所讨论的期权有时也称为“香草”期权或标准期权，以区别于近年来飞速发展的更为复杂的期权，亦称奇异期权(exotic option). 一般来说，这些奇异期权在执行时的价值不但依赖于当时标的证券的价格，还依赖于整个期权有效期内的证券价格路径. 在本章中，我们将介绍三种奇异期权——障碍期权、亚式期权和回望期权，并介绍如何利用蒙特卡罗模拟的方法有效地确定它们的几何布朗运动风险中性价值. 在本章的最后一节，我们将给出指数买入期权的风险中性价值公式，这个期权在执行时的支付，就是当时标的证券价格的某个指定幂次超出期权执行价的部分.

## 11.2　障碍期权

为了定义一个具有执行价 $K$ 和到期日 $t$ 的欧式买入障碍期权，要先指定一个障碍值 $v$. 当标的证券价格跨越障碍值时障碍期权是继续存在还是作废，取决于其类型. **下敲入障碍期权**(down-and-in barrier option)仅当 $t$ 以前证券价格降至 $v$ 以下时，才得以存在；而**下敲出障碍期权**(down-and-out barrier option)当证券的价格在 $t$ 之前降至 $v$ 以下时，就作废了. 对这两种期权而言，$v$ 是某个小于证券初始价格 $s$ 的指定数. 另外，在大多数应用中，突破障碍仅仅是考虑证券收盘价低于 $v$ 的情况；这就是说，在交易日之中发生价格低于 $v$ 的情况并不认为是突破了障碍. 现在，如果同时拥有两个有相同执行价 $K$ 和到期日 $t$ 的下敲入买入期权和下敲出买入期权，那么在时刻 $t$，恰有一个期权有效(如果突破了障碍，就是下敲入买入期权有效，否则是下敲出买入期权有效)；因此，同时持有这两个期权就相当于拥有一个具有执行价 $K$ 和到期日 $t$ 的普通期权. 如果以 $D_i(s, t, K)$和 $D_o(s, t, K)$分别表示下敲入买入期权和下敲出买入期权的风险中性价值，那么 [196]

$$D_i(s,t,K)+D_o(s,t,K)=C(s,t,K),$$

其中，$C(s, t, K)$是由式(7-2)给出的 Black-Scholes 价值. 确定了 $D_i(s, t, K)$或 $D_o(s, t, K)$中的一个就可以自动获得另一个.

此外还有**上敲入障碍买入期权**(up-and-in barrier call option)和**上敲出障碍买入期权**(up-and-out barrier call option). 上敲入买入期权仅当证券的价格在 $t$ 之前超过 $v$ 时，才得以存在；而上敲出买入期权则在证券价格于 $t$ 之前超过 $v$ 时，就作废了. 对这两种期权，障碍值 $v$ 要大于执行价 $K$. 由于同时拥有这样两个有相同执行价 $K$ 和到期日 $t$ 的期权相当于拥有一个普通期权，我们有

$$U_i(s,t,K)+U_o(s,t,K)=C(s,t,K),$$

其中 $U_i$ 和 $U_o$ 分别是上敲入买入期权和上敲出买入期权的几何布朗运动风险中性价值，$C$ 仍然是 Black-Scholes 价值.

## 11.3 亚式期权和回望期权

亚式期权(Asian option)在 $t$ 时刻的执行价格依赖于从 0 时刻(即购买期权的时刻)至到期日为止的某段时间内标的证券的平均价格. 由于这个平均价格通常是以收盘价来计算的，因此令 $N$ 表示一年中的交易天数(通常取 252 天)，并令

$$S_d(i)=S(i/N)$$

表示在第 $i$ 日收盘时证券的价格. 通常亚式买入期权的到期日是在 $n$ 个交易日后，执行价为 $K$，支付为

197

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}-K\right)^{+}.$$

另一种亚式期权将平均价格视为执行价；因此当到期日是 $n$ 个交易日之后时，这个买入期权最终的价值为

$$\left(S_d(n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}\right)^{+}$$

另一种奇异期权称为*回望期权*(lookback option)，它的执行价是期权到期日及此前标的证券的最小收盘价. 这就是说，如果到期日是在 $n$ 个交易日之后，那么在到期日的支付为

$$S_d(n)-\min_{i=1,\cdots,n}S_d(i).$$

因为这些期权的最终支付都依赖于标的证券在期权有效期内收盘价格路径，因此对于障碍期权、亚式期权和回望期权，并没有确切的风险中性价值公式. 但是，利用蒙特卡罗模拟方法可以快速有效地得到它们的近似值.

## 11.4 蒙特卡罗模拟

假设需要估计某个随机变量 $Y$ 的期望值 $\theta$，

$$\theta=E[Y].$$

并且假设我们能够产生与 $Y$ 具有相同概率分布的独立随机变量的值. 每产生一个这样的值，就称完成了一次模拟. 假设我们进行了 $k$ 次模拟，产生了 $k$ 个值 $Y_1$，$Y_2$，…，$Y_k$. 如果令

$$\bar{Y}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y_i$$

是它们的代数平均值，那么 $\bar{Y}$ 就可以当作 $\theta$ 的一个估计值. 它的期望和方差如下. 对于期望，我们有，

$$E[\bar{Y}] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}E[Y_i] = \theta.$$ 198

令

$$v^2 = \mathrm{Var}(Y),$$

可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{Y}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y_i\right)\\ &= \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}Y_i\right)\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Var}(Y_i) \qquad \text{(由独立性)}\\ &= v^2/k.\end{aligned}$$

根据中心极限定理，对于取值很大的 $k$，$\bar{Y}$ 具有近似正态分布．因为正态随机变量与其均值之间通常不会有太大的标准差(等于其方差的平方根)，因此如果 $v/\sqrt{k}$ 很小，那么 $\bar{Y}$ 一般会很接近 $\theta$．(例如，一个正态随机变量有95%的时间分布在它的均值的两个标准差之间，因此我们就可以有95%的把握确信 $\bar{Y}$ 产生的值在 $\theta - v/\sqrt{k}$ 和 $\theta + v/\sqrt{k}$ 之间．)所以当 $k$ 很大时，$\bar{Y}$ 是 $\theta$ 的一个较好的估计量．(为了得到估计的精确程度，我们可以利用产生的样本方差来估计 $v^2$．)这种估计期望值的方法就称为*蒙特卡罗模拟*．

## 11.5　奇异期权的模拟定价

假设名义利率为 $r$，证券的价格服从风险中性几何布朗运动；这就是说，它服从一个具有方差参数 $\sigma^2$、漂移参数 $\mu$ 的几何布朗运动，其中

$$\mu = r - \sigma^2/2.$$

令 $S_d(i)$ 表示证券在第 $i$ 日末的价格，并令

$$X(i) = \log\left(\frac{S_d(i)}{S_d(i-1)}\right).$$ 199

在几何布朗运动情形，相邻日价格比是独立的，因此 $X(1), \cdots, X(n)$ 是独立的正态随机变量，每一个都具有均值 $\mu/N$ 和方差 $\sigma^2/N$(和前面一样，$N$ 表示一年中交易日的天数)．因此，通过产生 $n$ 个具有这样均值和方差的独立正态随机变量，我们就可以构造一个具有 $n$ 个收盘价的序列，它与由风险中性几何布朗运动模型产生的价格具有相同的概率．(绝大多数的计算机语言和几乎所有的电子制表软件都有内嵌的应用程序来产生标准正态随机变量；将这些值乘以 $\sigma/\sqrt{N}$，再加上 $\mu/N$，就可以得到想要的正态随机变量．)

假设要计算一个下敲入障碍期权的风险中性价值，这个期权的执行价为 $K$，

障碍值为 $v$，初始值 $S(0)=s$，到期日是在 $n$ 个交易日末．首先产生 $n$ 个均值为 $\mu/N$、方差为 $\sigma^2/N$ 的独立正态随机变量，令它们分别等于 $X(1)$，…，$X(n)$，然后从以下的等式中决定收盘价序列：

$$\begin{aligned} S_d(0) &= s, \\ S_d(1) &= S_d(0)e^{X(1)}, \\ S_d(2) &= S_d(1)e^{X(2)}; \\ &\vdots \\ S_d(i) &= S_d(i-1)e^{X(i)}; \\ &\vdots \\ S_d(n) &= S_d(n-1)e^{X(n)}. \end{aligned}$$

对于这些价格，如果其中有一个收盘价低于障碍值 $v$，就令 $I$ 等于 1，否则等于 0，即：

$$I = \begin{cases} 1 & \text{如果对某个 } i = 1,\cdots,n, S_d(i) < v, \\ 0 & \text{如果对所有的 } i = 1,\cdots,n, S_d(i) \geqslant v. \end{cases}$$

因为下敲入买入期权只有当 $I=1$ 时才会存在，所以到期日 $n$ 时的支付在 0 时刻的值为：

200

$$\text{下敲入买入期权的支付} = e^{-rn/N} I(S_d(n) - K)^+ .$$

记这个支付为 $Y_1$．重复这个过程 $k-1$ 次，得到 $Y_1$，$Y_2$，…，$Y_k$，这是 $k$ 个支付值的集合．这时就可以将它们的平均值当作这个障碍期权的风险中性几何布朗运动价值的一个估计值．

亚式买入期权和回望买入期权的风险中性价值也可以通过类似的方法得到．与前面一样，我们首先产生 $X(1)$，…，$X(n)$的值，再利用它们来计算 $S_d(1)$，…，$S_d(n)$．对于亚式期权，如果执行价固定为 $K$，支付依赖于收盘价的平均值，那么令

$$Y = e^{-rn/N}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n} - K\right)^+$$

如果将收盘价的平均值当作执行价，则令

$$Y = e^{-rn/N}\left(S_d(n) - \sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}\right)^+$$

对于回望期权，可以令

$$Y = e^{-rn/N}(S_d(n) - \min_i S_d(i)).$$

重复这个过程 $k-1$ 次，并计算这 $k$ 个值的平均值，就可以得到风险中性价值的蒙特卡罗估计值．

## 11.6 更有效的模拟估计式

在本节中，我们将介绍如何借助控制变量和对偶变量，来更有效地模拟亚式



期权和回望期权的价值，并介绍如何通过条件期望的方差减少技术以及重要性抽样的方法来改进对障碍期权价值的模拟.

### 11.6.1 亚式期权和回望期权价值模拟中的控制变量和对偶变量

考虑一般情况，我们打算利用模拟方法来估计

$$\theta = E[Y].$$

[201]

假设在产生随机变量 $Y$ 值的过程中，还知道了某个随机变量 $V$ 的值，它的均值为 $\mu_V=E[V]$. 那么，代替 $Y$，我们使用具有以下形式的某个值作为估计量：

$$Y + c(V - \mu_V),$$

其中，$c$ 是待确定的常数. 从下面的式子可以看出，上式确实是 $\theta$ 的估计量：

$$E[Y + c(V - \mu_V)] = E[Y] + cE[V - \mu_V] = \theta + c(\mu_V - \mu_V) = \theta.$$

此种类型的最佳估计量就是选择 $c$ 使得 $\mathrm{Var}(Y+c(V-\mu_V))$尽可能地小. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y + c(V - \mu_V)) &= \mathrm{Var}(Y + cV)\\ &= \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(cV) + 2\mathrm{Cov}(Y, cV)\\ &= \mathrm{Var}(Y) + c^2\mathrm{Var}(V) + 2c\mathrm{Cov}(Y, V).\end{aligned} \tag{11-1}$$

如果我们对式(11-1)关于 $c$ 求导数，并令导数等于 0，再解出 $c$，那么使得 $\mathrm{Var}(Y+c(V-\mu_V))$最小的 $c$ 值应为

$$c^* = -\frac{\mathrm{Cov}(Y,V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

将这个值代回到式(11-1)，就可以得到

$$\mathrm{Var}(Y + c^*(V - \mu_V)) = \mathrm{Var}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}^2(Y,V)}{\mathrm{Var}(V)}. \tag{11-2}$$

在等式的两边同时除以 $\mathrm{Var}(Y)$得出

$$\frac{\mathrm{Var}(Y + c^*(V - \mu_V))}{\mathrm{Var}(Y)} = 1 - \mathrm{Corr}^2(Y,V),$$

其中

$$\mathrm{Corr}(Y,V) = \frac{\mathrm{Cov}(Y,V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)\mathrm{Var}(V)}}$$

是 $Y$ 和 $V$ 的相关系数. 因此，当利用控制变量 $V$ 时，可以减少方差 $100\mathrm{Corr}^2(Y, V)\%$.

[202]

用来决定 $c^*$ 的 $\mathrm{Cov}(Y, V)$和 $\mathrm{Var}(V)$的值通常是未知的，必须通过模拟得到的数据来估计. 如果进行了 $k$ 次模拟，得到 $Y_i$ 和 $V_i(i=1, \cdots, k)$，那么令样本均值为

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_i}{k} \quad \text{and} \quad \bar{V} = \sum_{i=1}^{k}\frac{V_i}{k}$$

Cov($Y$, $V$)可通过下式来估计：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i-\overline{Y})(V_i-\overline{V})}{k-1}$$

Var($V$)由以下的样本方差来估计：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(V_i-\overline{V})^2}{k-1}.$$

综合上面的估计就可以得到 $c^*$ 的估计量，即

$$\widehat{c^*}=-\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i-\overline{Y})(V_i-\overline{V})}{\sum_{i=1}^{k}(V_i-\overline{V})^2},$$

并可以产生以下关于 $\theta$ 的控制模拟估计量：

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(Y_i+\widehat{c^*}(V_i-\mu_V)).$$

现在来看如何用控制变量对亚式期权的价值进行模拟. 首先假设最终支付的现值为

$$Y=\mathrm{e}^{-rn/N}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}-K\right)^+.$$

显然，$Y$ 和

$$V=\sum_{i=0}^{n}S_d(i),$$

具有很强的正相关性，所以一种可能的做法是将 $V$ 当作一个控制变量. 为此，必须首先确定 $E[V]$. 因为

203

$$E[S_d(i)]=\mathrm{e}^{ri/N}S(0)$$

故对于风险中性价值，有

$$\begin{aligned}E[V]&=E\left[\sum_{i=0}^{n}S_d(i)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n}E[S_d(i)]\\&=S(0)\sum_{i=0}^{n}(\mathrm{e}^{r/N})^i\\&=S(0)\frac{1-\mathrm{e}^{r(n+1)/N}}{1-\mathrm{e}^{r/N}}.\end{aligned}$$

另一种控制变量的选择，是与亚式期权有相同执行价和到期日的标准期权的支付. 这就是说，我们可以取

$$V = (S_d(n) - K)^+$$

作为控制变量.

还有一种有效的方差减少技术是利用对偶变量. 这种方法首先产生数据 $X(1)$，…，$X(n)$，并利用它们来计算 $Y$. 然而，与其再产生另一组数据，不如通过以下的变化再利用一下已有的数据：

$$X(i) \Rightarrow \frac{2(r - \sigma^2/2)}{N} - X(i).$$

这就是说，对于每一个 $i=1$，…，$n$，令 $X(i)$ 的新值等于 $2(r-\sigma^2/2)/N$ 与它原来的值之差. ($X(i)$ 的新值与它原来的值是负相关的，但是它们仍然是具有相同均值和方差的正态随机变量.) 利用这些新的值，就可以计算 $Y$ 的值了，而通过模拟所得估计值是两个 $Y$ 值的平均值. 可以证明(见参考文献[5])，以这种方式重新利用数据，会比再产生一组新数据的方法有更小的方差.

现在，我们考虑一个亚式买入期权，它的执行价是股票日收盘价的平均值. 即，最终支付的现值为

204

$$Y = \mathrm{e}^{-rn/N}\left(S_d(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n}\right)^+.$$

回忆一次模拟过程包括：a)产生独立正态随机变量 $X(1)$，…，$X(n)$，它们的均值为 $(r-\sigma^2/2)/N$，方差为 $\sigma^2/N$；b)置

$$S_d(i) = S(0)\mathrm{e}^{X(1)+\cdots+X(i)}, \quad i = 1,\cdots,n.$$

因为当排在序列 $X(1)$，…，$X(n)$ 后面的值都是最大值时，$Y$ 的值也将会较大(反之则会很小)，因此可以选择以下类型的控制变量：

$$V = \sum_{i=1}^{n} w_i X(i),$$

其中，权重 $w_i$ 关于 $i$ 递增. 然而，建议使用所有的变量 $X(1)$，…，$X(n)$ 作为控制变量. 这就是说，从每次模拟中，考虑估计量

$$Y + \sum_{i=1}^{n} c_i \left(X(i) - \frac{r - \sigma^2/2}{N}\right).$$

因为控制变量是独立的，很容易证明(见练习 11.4) $c_i$ 的最优值为

$$c_i = -\frac{\mathrm{Cov}(X(i),Y)}{\mathrm{Var}(X(i))}, \quad i = 1,\cdots,n;$$

这些量都可以通过模拟的结果来估计. 建议在回望期权中使用同样的方法：使用所有的变量 $X(1)$，…，$X(n)$ 作为控制变量.

### 11.6.2　障碍期权价值模拟中的条件期望和重要性抽样的结合

在 11.5 节中我们给出了一种模拟方法，以确定一个下敲入障碍买入期权在几何布朗运动下的风险中性支付的期望价值. 这种模拟方法要产生 $X(i)$ 并用它来计算每日的收盘价和期权的支付. 注意到为了使得这个期权得以存在，至少有一个收盘价要降至障碍值之下. 由此观察我们可以对上述方法进行改进. 对于产生的数据，假设第一个小于障碍值的收盘价发生在第 $j$ 天末，且该天结束时价格为 $S_d(j)=x<v$. 此时障碍期权得以生存，只要给定离期权到期还有时间 $(n-j)/N$ 时证券的价格 $x$，它的价值就是一个标准买入期权的价值. 但是这意味着期权现在的价值为 $C(x,(n-j)/N,K)$. 因此，看上去我们可以如下进行：a) 只要有一个收盘价降至障碍值之下就停止模拟；b) 利用得出的 Black-Scholes 价值作为此次模拟的估计量. 事实上，我们的确可以这么做. 最终的估计量称为**条件期望估计量**，可以证明它比从 11.5 节中得到的估计量具有更小的方差.

205

利用**重要性抽样**的模拟技术可以进一步改进条件期望估计量. 由于在多次模拟中收盘价小于障碍值的情形可能一次也不会出现，因此如果我们能够首先从更可能产生小于障碍值的收盘价的一组概率中模拟出数据，然后加上一个因子以对这些不同的概率进行补偿，那么近似的效果会好得多. 这就是重要性抽样的思想. 该方法从具有均值 $(r-\sigma^2/2)/N-b$ 和方差 $\sigma^2/N$ 的正态分布中产生随机变量 $X(1)$，$X(2)$，…，并决定生成的收盘价首次降至障碍值之下的时间. 如果收盘价在时刻 $j$ 第一次降至障碍值之下时为 $x$，那么从这次模拟中得到的估计量为

$$C(x,(n-j)/N,K)\exp\left\{\frac{jb^2N}{2\sigma^2}+\frac{Nb}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{j}X_i-\frac{jb}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}$$

(细节请见参考文献[6])；如果这些价格永远也不低于障碍值，那么这次模拟的估计量就是 0. 多次模拟得出的估计量的平均值就是期权价值的整体估计量. 当然，为完成这一步骤，必须选择合适的 $b$. 最好的方法是通过经验选择 $b$. 有兴趣时可以做一些小模拟，看看 $b$ 取何值时具有较小的方差. 另外，选择下面的 $b$ 值对于我们这种方法是有效的(参见参考文献[1])：

206

$$b=\frac{r-\sigma^2/2}{N}-\frac{2\log\left(\frac{S(0)}{v}\right)+\log\left(\frac{K}{S(0)}\right)}{n}$$

## 11.7　非线性支付期权

对于一个标准的买入期权，只要在执行时刻标的证券的价格高于其执行价，它的支付就是证券价格的线性函数. 然而，有更多的期权的支付具有以下形式：

$$(h(S(t))-K)^+,$$

其中 $h$ 是任意的既定函数，$t$ 是到期日，$K$ 是执行价. 当用多时期二项模型近似

几何布朗运动时，常需要使用模拟或其他数值方法来决定这些期权的几何布朗运动风险中性价值．当 $h$ 具有以下形式时，

$$h(x)=x^{\alpha}.$$

可以得到相应价值确切的公式．具有非线性支付 $(S^{\alpha}(t)-K)^{+}$ 的期权称为指数期权，$\alpha$ 称为指数参数．

以 $C_{\alpha}(s,t,K,\sigma,r)$ 表示一个指数买入期权的风险中性价值，其中指数参数为 $\alpha$，到期日为 $t$，执行价为 $K$，利率为 $r$，标的证券的初始价格为 $s$，证券服从具有波动率 $\sigma$ 的几何布朗运动．和通常一样，我们以 $C(s,t,K,\sigma,r)=C_1(s,t,K,\sigma,r)$ 表示 Black-Scholes 价值，并令 $X$ 为具有均值 $(r-\sigma^2/2)t$ 和方差 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量．因为 $e^X$ 和 $S(t)/s$ 具有相同的概率分布，所以得出：

$$e^{rt}C(s,t,K,\sigma,r)=E[(S(t)-K)^{+}]=E[(se^{X}-K)^{+}]. \tag{11-3}$$

另外，由于 $(S(t)/s)^{\alpha}=S^{\alpha}(t)/s^{\alpha}$ 和 $e^{\alpha X}$ 具有相同的概率分布，又可得到：

$$E[(S^{\alpha}(t)-K)^{+}]=E[(s^{\alpha}e^{\alpha X}-K)^{+}]. \tag{11-4}$$

207

而 $\alpha X$ 是具有均值 $\alpha(r-\sigma^2/2)t$ 和方差 $\alpha^2\sigma^2 t$ 的正态随机变量，因此由式(11-3)，若 $r_{\alpha}$ 和 $\sigma_{\alpha}$ 分别使得

$$r_{\alpha}-\sigma_{\alpha}^2/2=\alpha(r-\sigma^2/2) \quad 和 \quad \sigma_{\alpha}^2=\alpha^2\sigma^2$$

那么

$$e^{r_{\alpha}t}C(s^{\alpha},t,K,\sigma_{\alpha},r_{\alpha})=E[(s^{\alpha}e^{\alpha X}-K)^{+}].$$

因此，由式(11-4)，可得到

$$\begin{aligned}
&e^{-rt}E[(S^{\alpha}(t)-K)^{+}]\\
&\quad=e^{-rt}e^{r_{\alpha}t}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha})\\
&\quad=\exp\{(\alpha(r-\sigma^2/2)+\alpha^2\sigma^2/2-r)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha})\\
&\quad=\exp\{(\alpha-1)(r+\alpha\sigma^2/2)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha}).
\end{aligned}$$

即

$$C_{\alpha}(s,t,K,\sigma,r)=\exp\{(\alpha-1)(r+\alpha\sigma^2/2)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha}),$$

其中

$$r_{\alpha}=\alpha(r-\sigma^2/2)+\alpha^2\sigma^2/2.$$

## 11.8 通过多时期二项模型近似定价

多时期二项模型也可以用来有效地确定某些奇异期权的风险中性几何布朗运动价格．例如，考虑一个下敲出障碍买入期权，标的证券的初始价格为 $s$，执行价为 $K$，到期日为 $t=n/N$(其中 $N$ 是一年中的交易日天数)，障碍值为 $v(v<s)$．首先选择一个整数 $j$，令 $m=nj$，$t_k=kt/m(k=0, 1, \cdots, m)$．将每一天视为由 $j$ 个时间段组成，利用 $m$ 时期二项模型来进行近似模拟．假设

$$S(t_{k+1})=\begin{cases}uS(t_k) & 以概率\ p,\\ dS(t_k) & 以概率\ 1-p,\end{cases}$$

208 其中

$$u=e^{\sigma\sqrt{t/m}},\qquad d=e^{-\sigma\sqrt{t/m}},$$
$$p=\frac{1+rt/m-d}{u-d}.$$

如果前 $k$ 个价格变化中有 $i$ 个是上升的，而有 $k-i$ 个是下降的，那么在 $t_k$ 时刻的价格为

$$S(t_k)=u^i d^{k-i}s.$$

令 $V_k(i)$ 表示障碍买入期权的期望支付值，这里假设在 $t_k$ 时刻该期权仍然生存并且价格为 $S(t_k)=u^i d^{k-i}s$，那么我们就可以利用 $e^{-rt}V_0(0)$ 来近似欧式障碍买入期权的期望支付现值. $V_0(0)$ 的值可以通过逆向计算得到. 这就是说，可以从下面的等式开始

$$V_m(i)=(u^i d^{m-i}s-K)^+,\quad i=0,\cdots,m,$$

首先确定 $V_m(0)$ 的值，然后重复使用以下的方程(开始时令 $k=m-1$，然后在每次迭代后将 $k$ 的值减 1)：

$$V_k(i)=pV_{k+1}(i+1)+(1-p)W_{k+1}(i),\qquad (11\text{-}5)$$

其中

$$W_{k+1}(i)=\begin{cases}0 & 如果\ u^i d^{k+1-i}s<v, j\ 整除\ k+1,\\ V_{k+1}(i) & 否则.\end{cases}$$

之所以这样定义 $W_{k+1}(i)$，是因为如果 $j$ 整除 $k+1$，那么 $(k+1)$ 时期的价格就是一个收盘价，如果它比障碍值小将会使得期权作废.

可以使用类似的步骤得到下敲入买入期权的风险中性价格. 或者，也可以使用前面的方法来确定一个具有相同参数的下敲出买入期权的价格，再利用下面的等式：

$$D_i(s,t,K)+D_o(s,t,K)=C(s,t,K),$$

其中 $D_i$，$D_o$ 和 $C$ 分别是下敲入买入期权、下敲出买入期权和普通的 Black-Scholes 买入期权的风险中性价格.

209 其他奇异期权的风险中性价格也可以通过多时期二项模型来近似. 不过，计算量可能会很大. 例如，考虑一个亚式期权，它的执行价是标的证券收盘价的平均值. 为了逐步地确定在时刻 $t_k$ 出现的所有最终支付的期望值，不仅需要确定在时刻 $t_k$ 的价格，还要确定到该时刻为止的收盘价之和. 这就是说，为了利用 $n$ 时期二项模型来近似一个 $n$ 日买入期权，我们需要逐步地计算最终期望支付值 $V_k(i, x)$，其中 $k$ 期后证券的价格为 $u^i d^{k-i}s$，前 $k$ 个价格之和为 $x$. 在前面 $k$ 个

价格中有 $i$ 个处于上升时，前 $k$ 个价格之和就会出现 $\binom{k}{i}$ 种可能，因此需要非常大的计算量才能得到一个较好的估计值. 一般来说，对于绝大多数依赖路径的奇异期权，建议使用模拟的方法来估计风险中性价格.

## 11.9 习题

**练习 11.1** 考虑一个在 $t$ 时刻之前随时都可执行的美式买入期权，当它在 $y$ 时刻$(0\leqslant y\leqslant t)$执行时，执行价为 $Ke^{uy}$，其中 $u$ 是某个特定的值. 这就是说，如果买入期权在 $y$ 时刻$(0\leqslant y\leqslant t)$执行，它的支付为

$$(S(y)-e^{uy}K)^{+}.$$

证明，如果 $u\leqslant r$，那么永远不会提前执行这个买入期权. 其中，$r$ 为利率.

**练习 11.2** 一个回望卖出期权在 $n$ 个交易日之后到期，其支付为在时刻 $n$ 前标的证券的最大收盘价减去在 $n$ 时刻的价格. 这就是说，它的支付为

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}S_d(i)-S_d(n).$$

请解释如何有效地利用蒙特卡罗模拟方法来得到该期权的几何布朗运动风险中性价格.

**练习 11.3** 在 11.6.1 节中曾经提到 $V=(S_d(n)-K)^{+}$ 可以用作控制变量. 然而，这样做需要知道它的均值. 请求出 $E[V]$的值. [210]

**练习 11.4** 令 $X_1$，…，$X_n$ 是具有期望值 $E[X_i]=\mu_i$ 的独立随机变量. 考虑以下对 $E[Y]$的模拟估计量：

$$W=Y+\sum_{i=1}^{n}c_i(X_i-\mu_i).$$

a)证明

$$\mathrm{Var}(W)=\mathrm{Var}(Y)+\sum_{i=1}^{n}c_i^2\,\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{Cov}(Y,X_i).$$

b)利用微积分方法证明使得 $\mathrm{Var}(W)$最小的 $c_1$，…，$c_n$ 的值应为

$$c_i=-\frac{\mathrm{Cov}(Y,X_i)}{\mathrm{Var}(X_i)},\quad i=1,\cdots,n.$$

**练习 11.5** 使用蒙特卡罗模拟方法来估计一个奇异期权的风险中性价值. 第一次估计不用任何方差减少技术，第二次时选用某种方差减少技术.

**练习 11.6** 给出利用多时期二项模型来估计一个下敲入障碍买入期权的风险中性价格时所需的方程.

**练习 11.7** 请解释如何利用多时期二项模型来估计一个美式下敲出买入期权的风险中性价格.

**练习 11.8** 请解释为什么式(11-5)成立.

## 参考文献


[1] Boyle, P., M. Broadie, and P. Glasserman (1997). "Monte Carlo Methods for Security Pricing." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1267–1321.

[2] Conze, A., and R. Viswanathan (1991). "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options." *Journal of Finance* 46: 1893–1907.

[3] Goldman, B., H. Sosin, and M. A. Gatto (1979). "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High." *Journal of Finance* 34: 1111–27.

211

[4] Hull, J. C., and A. White (1998). "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23: 237–51.

[5] Ross, S. M. (2002). *Simulation*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press.

[6] Ross, S. M., and J. G. Shanthikumar (2000). "Pricing Exotic Options: Monotonicity in Volatility and Efficient Simulations." *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 14: 317–26.

212

[7] Rubinstein, M. (1991). "Pay Now, Choose Later." *Risk* (February).




# 第12章 非几何布朗运动模型

## 12.1 引言

正如前面所指出的那样，对一个证券的价格过程作几何布朗运动假设(它也是Black-Scholes定价公式的假设)有一个重要前提，就是该证券未来价格变化与历史价格变动情况是无关的. 许多投资者都承认这个前提，但也有很多人不认同. 接受此前提的投资者认为这是有效市场假说的推论. 该假说断言，一个证券的当前价格包含了现在所有可能得到的信息，这些信息中也包括此证券的历史价格. 然而，批评者争辩说，不同的投资者对新信息的接纳速度是不一样的，因此过去的价格变动情况反映了那些尚未被普遍知晓但还会影响未来价格的信息. 我们相信没有任何先验的原因使得未来价格变化必定与过去的价格无关，所以应该通过考察实际价格数据以检验它们是否真的与几何布朗运动模型一致. 也就是说，与其匆忙地表示赞成哪一种观点，不如尽可能多地让实际数据来说话.

在12.2节我们将分析从1995年1月3日到1997年11月19日间，最近月期原油每个交易日末的价格(此时期正好处在亚洲金融危机之前，该危机严重影响了原油的需求，使其价格下跌). 作为分析的一部分，我们将论证：这个价格序列与原油价格过程服从几何布朗运动的假设是不一致的. 在12.3节，我们提出一个与这些数据一致且直观上可行的新模型. 我们还将说明，如何在下面两种情形下用此模型来确定期权价格：a)假设未来价格变化与历史价格变动具有相似性；b)基于新模型的风险中性价值.



## 12.2 原油数据

将1995年1月3日定为第0天，$P(n)$记从第0天起第$n$个交易日末的最近月期原油价格(纽约商品交易所交易价). $P(n)$ ($n=1, \cdots, 752$) 的值标于图12-1中(本章末的表12-5给出了它们的数值).

令

$$L(n)=\log(P(n)),$$

并定义

$$D(n)=L(n)-L(n-1).$$

即$D(n)$ ($n\geqslant 1$)是相邻两天价格对数的差值. $D(n)$的值也在表12-5和直方图12-2中给出.

注意，在几何布朗运动下，$D(n)$应该是独立同分布的正态随机变量，图12-2中的直方图与来自正态总体的数据形成的直方图是一致的. 但是在作一

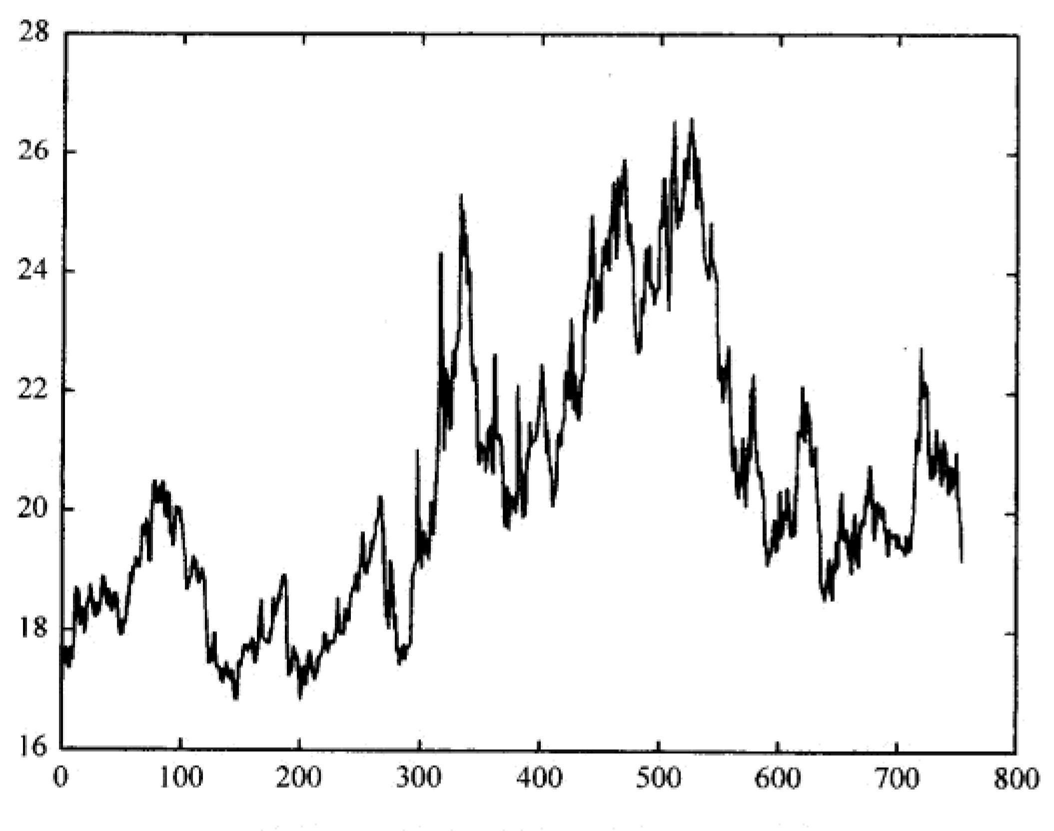



图 12-1　最近月期原油日收盘价序列

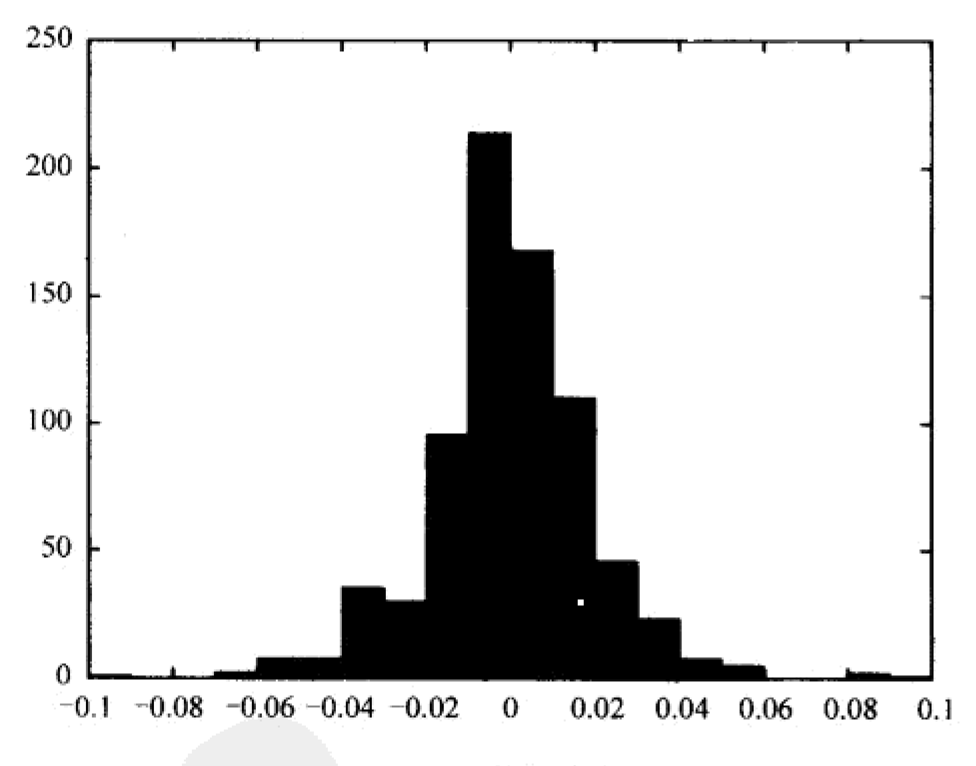



图 12-2　对数差直方图

个直方图时，是将数据按照数值大小将它们分成几个区间，然后统计出每个区间内数据的个数作成图. 这样做就忽略了数据间可能存在的相互依赖信息. 为了考虑这种相互依赖性，我们将每一天按以下方法分类，使它具有 4 种可能的状态之一. 称第 $n$ 天具有状态

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{如果 } D(n) \leqslant -0.01, \\ 2 & \text{如果 } -0.01 < D(n) \leqslant 0, \end{array}$$

$$3 \quad \text{如果 } 0 < D(n) \leqslant 0.01,$$
$$4 \quad \text{如果 } D(n) > 0.01.$$

214~215

也就是说，将第 $n$ 天的价格与第 $n-1$ 天的价格相比，如果损失大于 1%（$e^{-0.01} \approx 0.99005$），则该天具有状态 1；如果此相对损失小于 1%，则该天具有状态 2；如果相对收益小于 1%（$e^{0.01} \approx 1.0101$），则该天为状态 3；如果相对收益大于 1%，则它处于状态 4. 注意，如果价格变化过程服从几何布朗运动，则明天的状态与今天的状态无关. 有一种验证此假设的可行方法就是对 $i, j=1, \cdots, 4$，看有多少次当天处于状态 $i$，而随后的一天为状态 $j$. 表 12-1 给出的信息显示具有状态 3 的 168 天中，有 26 天的后一天为状态 1，46 天的后一天处于状态 2 等等.

**表 12-1**

| $i$ | $j$ | | | | 总计 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 55 | 41 | 44 | 36 | 176 |
| 2 | 44 | 65 | 45 | 60 | 214 |
| 3 | 26 | 46 | 47 | 49 | 168 |
| 4 | 52 | 62 | 31 | 48 | 193 |

如果像表 12-2 那样将数据表示成百分比的形式，表 12-1 的含义会更加清晰. 例如，一个大幅下跌(大于 1%)之后，紧接着大幅下跌的时间占 31%，紧接着小幅下跌的时间占 23%，紧接着小幅上涨的时间占 25%，而紧接着出现大幅上涨的时间占 21%. 有趣的是，一个中等涨幅后第二天出现大幅下跌的时间占 15%，大幅上涨之后紧接着大幅下跌的占 27%. 在几何布朗运动模型下，明天的变化是不受今天变化影响的，所以理论上讲表 12-2 中各行的期望百分比都应该是相同的. 我们可以使用一个标准统计检验程序(用于检验一个随机表格中数据的独立性)来检验实际数据遵循几何布朗运动的可能性. 将该程序应用到数据中得知 $p$ 值等于 0.005. 这意味着如果行概率相等(由几何布朗运动推知)，则产生的数据与实际数据一样不支持等概率假设的可能性仅为 1/200(检验统计量的值等于 23.447，这导致 $p$ 值为 0.005 26).

**表 12-2**

| $i$ | $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 31 | 23 | 25 | 21 |
| 2 | 21 | 30 | 21 | 28 |
| 3 | 15 | 28 | 28 | 29 |
| 4 | 27 | 32 | 16 | 25 |

现将 751 个 $D(n)$值分为四组：第一组包括 176 个值(明天的价格对数减今天的价格对数)，一个值 $D(n)$属于第一组当且仅当 $n-1$ 天具有状态 1；其他组的分类类似：若 $n-1$ 天的状态是 2(或 3 或 4)，则 $D(n)$分在第二(或三或四)组. 图 12-3～图12-6 给出了每一组数据的直方图. 注意每个直方图都近似铃形，与正态密度函数的曲线相似.

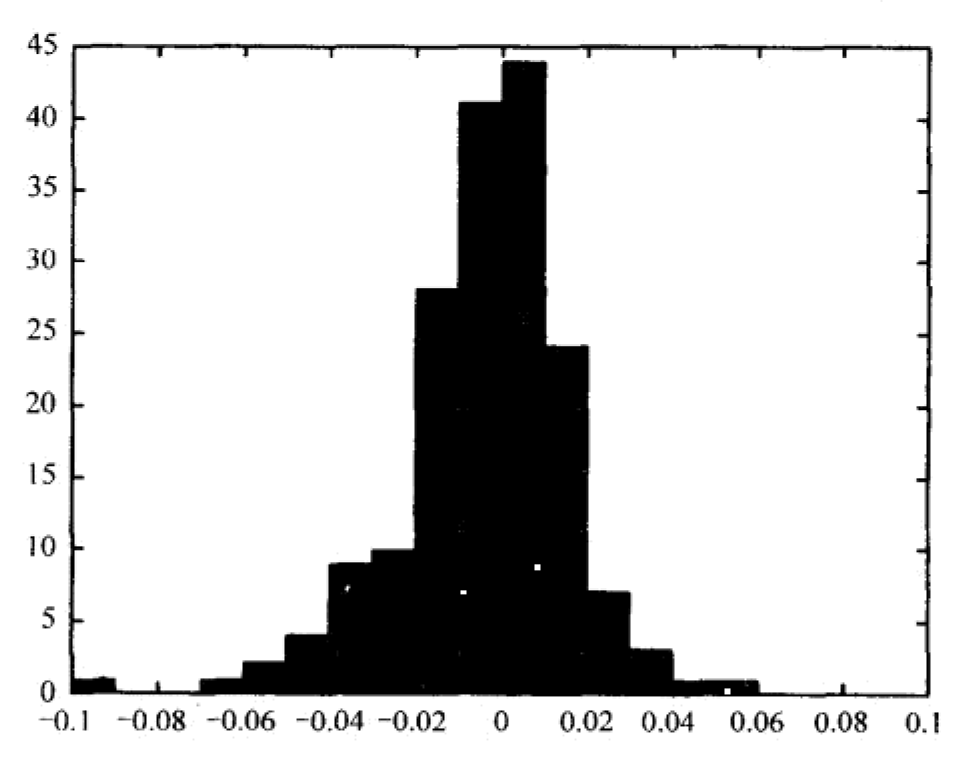



图 12-3 状态 1 下数据的直方图($n=176$)

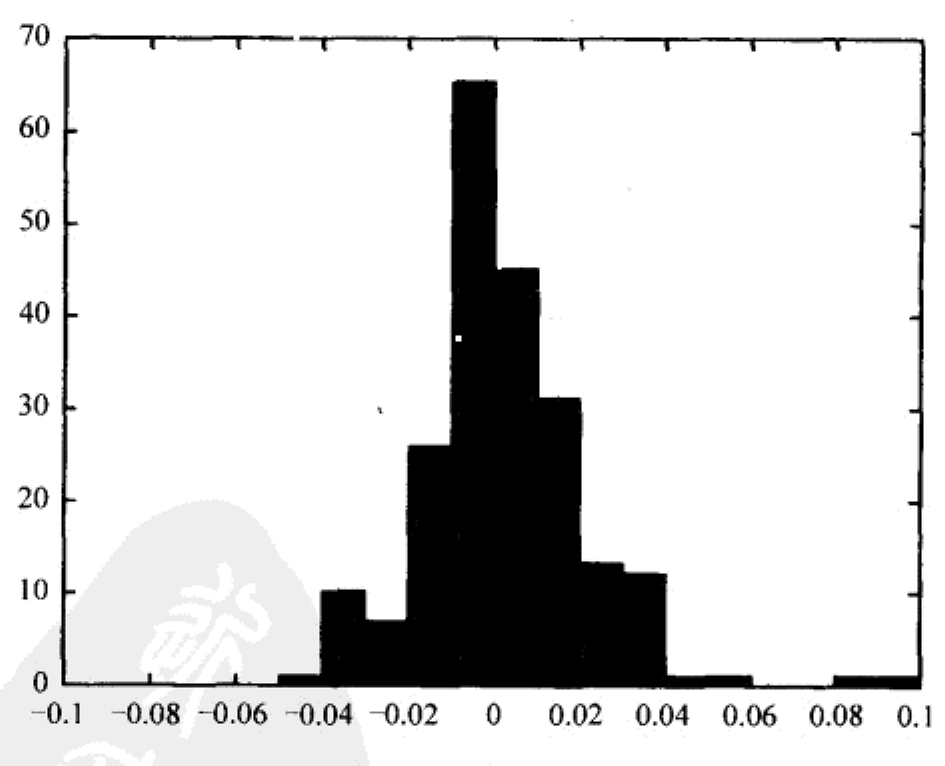



图 12-4 状态 2 下数据的直方图($n=214$)

设 $\overline{x}_i$，$s_i$ 分别为组 $i(i=1, 2, 3, 4)$的样本均值和样本标准差(它等于样本方差的平方根). 计算结果见表 12-3.

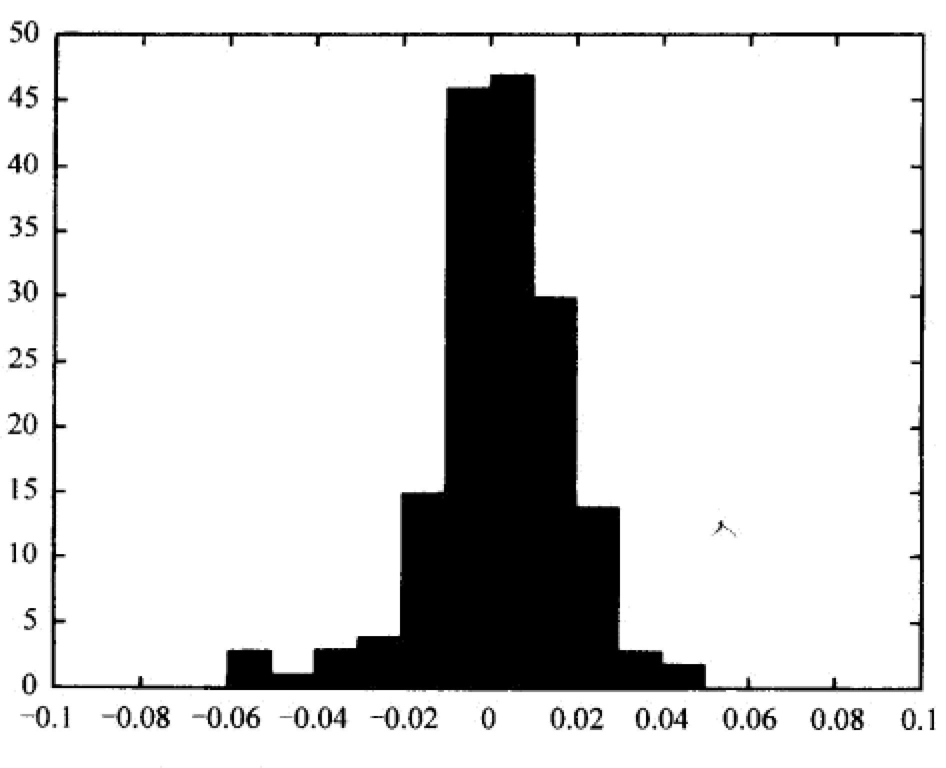



图 12-5 状态 3 下数据的直方图($n=168$)

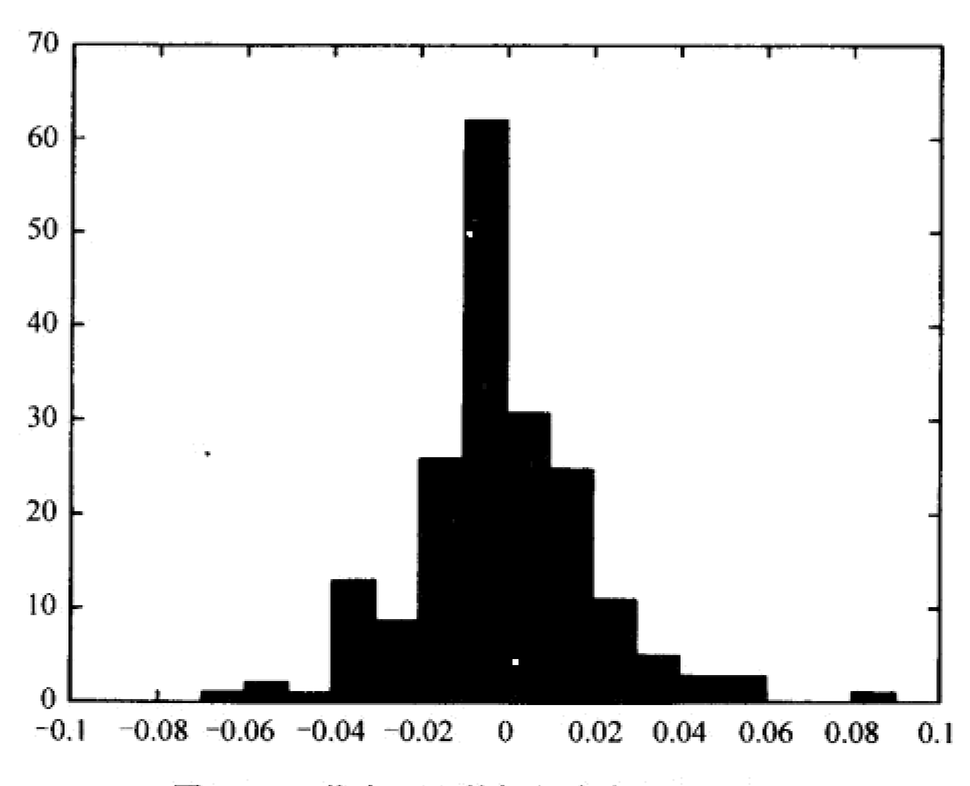



图 12-6 状态 4 下数据的直方图($n=193$)

**表 12-3**

| $i$ | 均值 $\bar{x}_i$ | S. D. $s_i$ | $i$ | 均值 $\bar{x}_i$ | S. D. $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.003 6 | 0.019 4 | 3 | 0.002 5 | 0.016 5 |
| 2 | 0.002 4 | 0.018 8 | 4 | −0.001 1 | 0.020 8 |

在几何布朗运动模型下，这四组数据应该来自同一正态总体，所以可以用一个标准统计检验方法(称为单向方差分析法)来检验四组数据都来自同样均值和方差的正态随机变量这一假设. 计算结果显示，该检验统计量(当假设成立时，该

统计量服从自由度为(3，747)的 $F$ 分布)的值等于 4.50，这个值相当大. 事实上，如果“四组数据来自同一正态分布”这一假设成立，那么检验统计量的值不小于 4.50 的概率小于 0.001. 这项统计检验更加证明了原油数据反映的价格过程不是几何布朗运动.（另外还可以用 Bartlett 检验法来检验“均值不等时，方差可能相等”的假设是否成立. 使用我们的数据，此时检验统计量的值等于 9.59，相应 $p$ 值小于 0.25.）

## 12.3 原油数据模型

一个合理的模型是：假设存在四个分布，它们可决定相继两天的价格对数差，且其中的某个分布依赖于今天的状态. 但是，即使如此，仍要确定是否需要一个风险中性模型，或者一个基于如下假设的模型：未来价格常常延续过去的价格趋势. 在后一种情形，我们使用这样的模型：如果今天的状态是 $i$，假设明天价格与今天价格比的对数是均值为 $\bar{x}_i$，标准差为 $s_i$ 的正态随机变量($i=1, 2, 3, 4$)，其中 $\bar{x}_i$，$s_i$ 的值由表 12-3 中给出. 但是，如果放弃正态假设，而使用“解鞋带”(bootstrap)方法，则很可能获得一个更好的模型. 此方法假定，来自状态 $i$ 的对数比分布的最佳近似，可以通过从该组 $n_i$ 个数据中随机抽取一个的方法获得(这里，$n_1=176$，$n_2=214$，$n_3=168$，$n_4=193$). 无论我们假设这组数据是正态的还是改用 bootstrap 方法，都需要进行蒙特卡罗模拟(见第 11 章)，以求出拥有一个期权的期望值，甚至一个未来价格的期望值. 不过，这种模拟是很直接的，也可以用方差减少技术来缩短计算时间.

216~220

风险中性模型似乎最适宜用来判定一个期权的价格相对其标的证券的价格来说，是低估了还是高估了. 假设在状态 $i$ 下，上述对数比是均值为 $\mu_i$，标准差为 $s_i$ 的正态随机变量，那么此时就可以获得一个风险中性模型. 这里

$$\mu_i = r/N - s_i^2/2;$$

$r$ 是利率，$N$(一般等于 252)是一年的总交易天数. 同样，此时也需要进行模拟从而确定期权的期望价值.

虽然根据相邻两天的价格对数比已经定义了四个不同状态，但是如果可以定义更多的状态，很可能会得到更好的模型. 事实上，还有一个获得风险中性模型的方法就是将波动率确定为 $D(n)$ 的最新值的函数，方法是：假设 $D(n)$ 为 $i$ 组的中点时，波动率等于 $s_i$，然后利用一般线性插值法(见图 12-7).

除了利用上述四个状态来描述数据的分布外，我们还可以定义六个状态，如下：

第 $n$ 天的状态为：

1　若 $D(n) \leqslant -0.02$，

2　若 $-0.02 < D(n) \leqslant 0.01$，

3　若 $-0.01 < D(n) \leqslant 0$，

4　若 $0 < D(n) \leqslant 0.01$,

5　若 $0.01 < D(n) \leqslant 0.02$,

6　若 $D(n) > 0.02$.

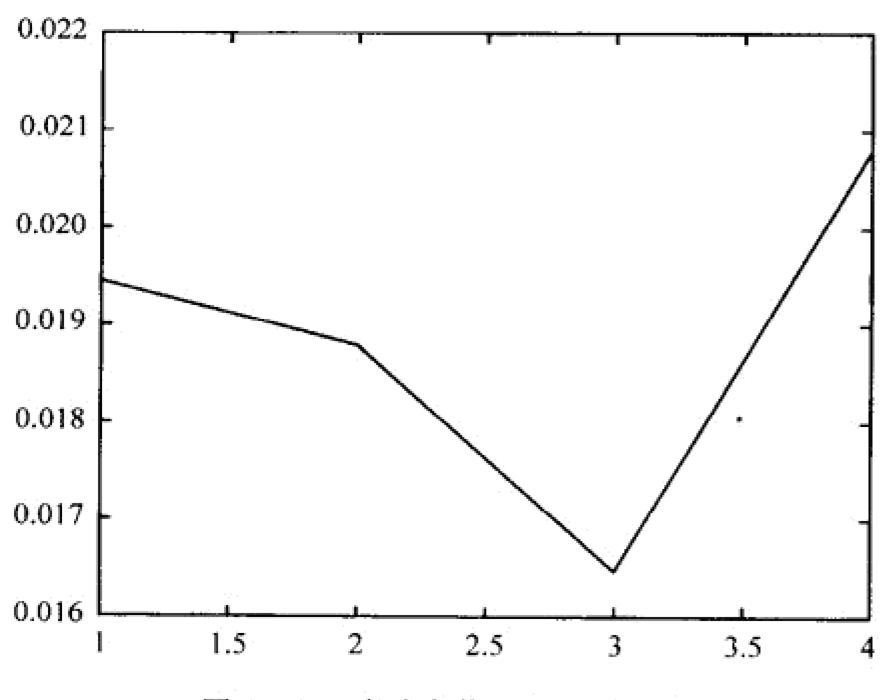



图 12-7　波动率作为状态的函数

在这些状态下，状态 $j$ 紧随着状态 $i$ 出现的次数在表 12-4 的第 $i$ 行、第 $j$ 列给出. 相应模型的分析与四状态模型时相同.

表　12-4

| $i$ | $j$ | | | | | | 总计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 10 | 12 | 25 | 19 | 12 | 3 | 81 |
| 2 | 17 | 16 | 16 | 25 | 12 | 9 | 95 |
| 3 | 18 | 26 | 65 | 45 | 31 | 29 | 214 |
| 4 | 11 | 15 | 46 | 47 | 30 | 19 | 168 |
| 5 | 14 | 15 | 39 | 19 | 13 | 10 | 110 |
| 6 | 12 | 11 | 23 | 12 | 12 | 13 | 83 |

## 12.4　最后的评论

在本章中我们看到，并不是所有的证券价格数据都与几何布朗运动假设下的价格一致. 几何布朗运动是马尔可夫模型. 这种模型系统(即证券价格过程)假定，其未来状态只依赖于当前的情况，而与历史状况无关. 但是，许多人认为证券近期的价格变动对预测其未来价格走向应该有一定的影响，这种想法似乎是合情理的. 在本章中，我们提出了一个简单模型来描述日收盘价序列. 该模型假

221～222

定，相继两日价格之比所构成的序列是一个马尔可夫模型．也就是说，对于相继两日价格比形成的序列，几何布朗运动模型假定它是独立的，而我们所提议的模型却允许它具有马尔可夫依赖性．

在利用这个模型来估计期权价值时，我们建议收集迄今为止的所有数据，并假设未来价格与历史价格有关，再利用“解鞋带”(bootstrap)法或者假设正态性，使用估计值$\overline{x}_i$，$s_i$来建立期权价格模型．但是，如果想判定期权价格较其标的证券的价格是低估还是高估了，则建议在这个模型中使用风险中性变量．此时用$r/N-s_i^2/2$代替$\overline{x}_i$作为状态$i$下对数比的均值．这个风险中性模型允许波动率依赖于最近几日的价格变化，这与有效市场假设下的变量是一致的．该假设认为证券的当前价格在以下意义下是公平的：未来价格的期望现值等于它的当前价格(这称为鞅性(martingale)假设)．

## 参考文献


[1] Efron, B., and R. Tibshirani(1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.

[2] Fama, Eugene(1965). “The Behavior of Stock Market Prices.” *Journal of Business* 38: 34－105.

[3] Malkiel, Burton G. (1990). *A Random Walk Down Wall Street*. New York: Norton.

[4] Niederhoffer, Victor(1966). “A New Look at Clustering of Stock Prices.” *Journal of Business* 39: 309－13.


223



表 12-5 最近月期原油数据(美元)

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/1/3 | 17.44 | | 95/2/27 | 18.66 | −0.001 606 43 |
| 95/1/4 | 17.48 | 0.002 290 95 | 95/2/28 | 18.49 | −0.009 152 15 |
| 95/1/5 | 17.72 | 0.013 636 6 | 95/3/1 | 18.32 | −0.009 236 69 |
| 95/1/6 | 17.67 | −0.002 825 66 | 95/3/2 | 18.35 | 0.001 636 22 |
| 95/1/9 | 17.4 | −0.015 398 1 | 95/3/3 | 18.63 | 0.015 143 6 |
| 95/1/10 | 17.37 | −0.001 725 63 | 95/3/6 | 18.59 | −0.002 149 38 |
| 95/1/11 | 17.72 | 0.019 949 4 | 95/3/7 | 18.63 | 0.002 149 38 |
| 95/1/12 | 17.72 | 0 | 95/3/8 | 18.33 | −0.016 234 1 |
| 95/1/13 | 17.52 | −0.011 350 9 | 95/3/9 | 18.02 | −0.017 056 8 |
| 95/1/16 | 17.88 | 0.020 339 7 | 95/3/10 | 17.91 | −0.006 123 04 |
| 95/1/17 | 18.32 | 0.024 310 6 | 95/3/13 | 18.19 | 0.015 512 8 |
| 95/1/18 | 18.73 | 0.022 133 2 | 95/3/14 | 17.94 | −0.013 839 1 |
| 95/1/19 | 18.69 | −0.002 137 89 | 95/3/15 | 18.11 | 0.009 431 42 |
| 95/1/20 | 18.65 | −0.002 142 48 | 95/3/16 | 18.16 | 0.002 757 1 |
| 95/1/23 | 18.1 | −0.029 934 2 | 95/3/17 | 18.26 | 0.005 491 5 |
| 95/1/24 | 18.39 | 0.015 895 1 | 95/3/20 | 18.56 | 0.016 295 9 |
| 95/1/25 | 18.39 | 0 | 95/3/21 | 18.43 | −0.007 028 96 |
| 95/1/26 | 18.24 | −0.008 190 05 | 95/3/22 | 18.96 | 0.028 351 7 |
| 95/1/27 | 17.95 | −0.016 026 9 | 95/3/23 | 18.92 | −0.002 111 93 |
| 95/1/30 | 18.09 | 0.007 769 18 | 95/3/24 | 18.78 | −0.007 427 09 |
| 95/1/31 | 18.39 | 0.016 447 7 | 95/3/27 | 19.07 | 0.015 323 9 |
| 95/2/1 | 18.52 | 0.007 044 19 | 95/3/28 | 19.05 | −0.001 049 32 |
| 95/2/2 | 18.54 | 0.001 079 33 | 95/3/29 | 19.22 | 0.008 884 3 |
| 95/2/3 | 18.78 | 0.012 861 9 | 95/3/30 | 19.15 | −0.003 648 69 |
| 95/2/6 | 18.59 | −0.010 168 7 | 95/3/31 | 19.17 | 0.001 043 84 |
| 95/2/7 | 18.46 | −0.007 017 57 | 95/4/3 | 19.03 | −0.007 329 88 |
| 95/2/8 | 18.3 | −0.008 705 17 | 95/4/4 | 19.18 | 0.007 851 39 |
| 95/2/9 | 18.24 | −0.003 284 08 | 95/4/5 | 19.56 | 0.019 618 6 |
| 95/2/10 | 18.46 | 0.011 989 2 | 95/4/6 | 19.77 | 0.010 679 |
| 95/2/13 | 18.27 | −0.010 345 9 | 95/4/7 | 19.67 | −0.005 071 |
| 95/2/14 | 18.32 | 0.002 732 99 | 95/4/10 | 19.59 | −0.004 075 4 |
| 95/2/15 | 18.42 | 0.005 443 67 | 95/4/11 | 19.88 | 0.014 695 |
| 95/2/16 | 18.59 | 0.009 186 77 | 95/4/12 | 19.55 | −0.016 738 9 |
| 95/2/17 | 18.91 | 0.017 067 1 | 95/4/13 | 19.15 | −0.020 672 6 |
| | 18.91 | 0 | 95/4/17 | 19.15 | 0 |
| 95/2/21 | 18.86 | −0.002 647 61 | 95/4/18 | 19.73 | 0.029 837 6 |
| 95/2/22 | 18.63 | −0.012 270 1 | 95/4/19 | 20.05 | 0.016 088 8 |
| 95/2/23 | 18.43 | −0.010 793 4 | 95/4/20 | 20.41 | 0.017 795 8 |
| 95/2/24 | 18.69 | 0.014 008 8 | 95/4/21 | 20.52 | 0.005 375 04 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/4/24 | 20.41 | −0.005 375 04 | 95/6/15 | 18.94 | −0.005 791 01 |
| 95/4/25 | 20.12 | −0.014 310 6 | 95/6/16 | 18.84 | −0.005 293 82 |
| 95/4/26 | 20.29 | 0.008 413 81 | 95/6/19 | 18.22 | −0.033 462 4 |
| 95/4/27 | 20.15 | −0.006 923 87 | 95/6/20 | 18.01 | −0.011 592 7 |
| 95/4/28 | 20.43 | 0.013 800 1 | 95/6/21 | 17.46 | −0.031 014 6 |
|  | 20.38 | −0.002 450 38 | 95/6/22 | 17.5 | 0.002 288 33 |
| 95/5/1 | 20.5 | 0.005 870 86 | 95/6/23 | 17.49 | −0.000 571 592 |
| 95/5/2 | 20.09 | −0.020 202 7 | 95/6/26 | 17.64 | 0.008 539 76 |
| 95/5/3 | 19.89 | −0.010 005 1 | 95/6/27 | 17.77 | 0.007 342 59 |
| 95/5/4 | 20.29 | 0.019 911 1 | 95/6/28 | 17.97 | 0.011 192 1 |
| 95/5/5 | 20.33 | 0.001 969 47 | 95/6/29 | 17.56 | −0.023 080 1 |
| 95/5/8 | 20.29 | −0.001 969 47 | 95/6/30 | 17.4 | −0.009 153 38 |
| 95/5/9 | 19.61 | −0.034 088 5 |  | 17.4 | 0 |
| 95/5/10 | 19.75 | 0.007 113 85 |  | 17.4 | 0 |
| 95/5/11 | 19.41 | −0.017 365 1 | 95/7/5 | 17.18 | −0.012 724 3 |
| 95/5/12 | 19.52 | 0.005 651 18 | 95/7/6 | 17.37 | 0.010 998 7 |
| 95/5/15 | 19.9 | 0.019 280 2 | 95/7/7 | 17.14 | −0.013 329 7 |
| 95/5/16 | 20.08 | 0.009 004 56 | 95/7/10 | 17.34 | 0.011 601 1 |
| 95/5/17 | 19.96 | −0.005 994 02 | 95/7/11 | 17.32 | −0.001 154 07 |
| 95/5/18 | 20 | 0.002 002 | 95/7/12 | 17.49 | 0.009 767 39 |
| 95/5/19 | 20.06 | 0.002 995 51 | 95/7/13 | 17.25 | −0.013 817 1 |
| 95/5/22 | 19.81 | −0.012 540 9 | 95/7/14 | 17.32 | 0.004 049 76 |
| 95/5/23 | 19.77 | −0.002 021 22 | 95/7/17 | 17.2 | −0.006 952 52 |
| 95/5/24 | 19.41 | −0.018 377 2 | 95/7/18 | 17.35 | 0.008 683 12 |
| 95/5/25 | 19.26 | −0.007 757 99 | 95/7/19 | 17.33 | −0.001 153 4 |
| 95/5/26 | 18.69 | −0.030 041 8 | 95/7/20 | 17.01 | −0.018 637 7 |
|  | 18.69 | 0 | 95/7/21 | 16.79 | −0.013 017 9 |
| 95/5/30 | 18.78 | 0.004 803 85 | 95/7/24 | 16.88 | 0.005 346 02 |
| 95/5/31 | 18.89 | 0.005 840 21 | 95/7/25 | 16.93 | 0.002 957 71 |
| 95/6/1 | 18.9 | 0.000 529 241 | 95/7/26 | 17.5 | 0.033 113 7 |
| 95/6/2 | 19.14 | 0.012 618 5 | 95/7/27 | 17.49 | −0.000 571 592 |
| 95/6/5 | 19.25 | 0.005 730 67 | 95/7/28 | 17.43 | −0.003 436 43 |
| 95/6/6 | 19.06 | −0.009 919 16 | 95/7/31 | 17.56 | 0.007 430 73 |
| 95/6/7 | 19.18 | 0.006 276 17 | 95/8/1 | 17.7 | 0.007 941 05 |
| 95/6/8 | 18.91 | −0.014 177 2 | 95/8/2 | 17.78 | 0.004 509 59 |
| 95/6/9 | 18.8 | −0.005 834 01 | 95/8/3 | 17.72 | −0.003 380 28 |
| 95/6/12 | 18.86 | 0.003 186 41 | 95/8/4 | 17.71 | −0.000 564 493 |
| 95/6/13 | 18.91 | 0.002 647 61 | 95/8/7 | 17.65 | −0.003 393 67 |
| 95/6/14 | 19.05 | 0.007 376 22 | 95/8/8 | 17.79 | 0.007 900 72 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/8/9 | 17.78 | −0.000 562 272 | 95/10/3 | 17.56 | −0.004 545 46 |
| 95/8/10 | 17.89 | 0.006 167 67 | 95/10/4 | 17.3 | −0.014 917 1 |
| 95/8/11 | 17.86 | −0.001 678 32 | 95/10/5 | 16.87 | −0.025 169 6 |
| 95/8/14 | 17.48 | −0.021 506 2 | 95/10/6 | 17.03 | 0.009 439 6 |
| 95/8/15 | 17.47 | −0.000 572 246 | 95/10/9 | 17.31 | 0.016 307 9 |
| 95/8/16 | 17.55 | 0.004 568 83 | 95/10/10 | 17.42 | 0.006 334 6 |
| 95/8/17 | 17.66 | 0.006 248 25 | 95/10/11 | 17.29 | −0.007 490 67 |
| 95/8/18 | 17.87 | 0.011 821 1 | 95/10/12 | 17.12 | −0.009 880 93 |
| 95/8/21 | 18.25 | 0.021 041 8 | 95/10/13 | 17.41 | 0.016 797 4 |
| 95/8/22 | 18.54 | 0.015 765 5 | 95/10/16 | 17.59 | 0.010 285 8 |
| 95/8/23 | 18 | −0.029 558 8 | 95/10/17 | 17.68 | 0.005 103 5 |
| 95/8/24 | 17.86 | −0.007 808 18 | 95/10/18 | 17.61 | −0.003 967 13 |
| 95/8/25 | 17.86 | 0 | 95/10/19 | 17.32 | −0.016 605 |
| 95/8/28 | 17.82 | −0.002 242 15 | 95/10/20 | 17.37 | 0.002 882 68 |
| 95/8/29 | 17.82 | 0 | 95/10/23 | 17.21 | −0.009 253 97 |
| 95/8/30 | 17.79 | −0.001 684 92 | 95/10/24 | 17.32 | 0.006 371 29 |
| 95/8/31 | 17.84 | 0.002 806 63 | 95/10/25 | 17.32 | 0 |
| 95/9/1 | 18.04 | 0.011 148 4 | 95/10/26 | 17.58 | 0.014 9 |
|  | 18.04 | 0 | 95/10/27 | 17.54 | −0.002 277 91 |
| 95/9/5 | 18.58 | 0.029 494 2 | 95/10/30 | 17.62 | 0.004 550 63 |
| 95/9/6 | 18.36 | −0.011 911 3 | 95/10/31 | 17.64 | 0.001 134 43 |
| 95/9/7 | 18.27 | −0.004 914 01 | 95/11/1 | 17.74 | 0.005 652 93 |
| 95/9/8 | 18.44 | 0.009 261 85 | 95/11/2 | 17.98 | 0.013 438 1 |
| 95/9/11 | 18.47 | 0.001 625 58 | 95/11/3 | 17.94 | −0.002 227 17 |
| 95/9/12 | 18.64 | 0.009 162 02 | 95/11/6 | 17.71 | −0.012 903 4 |
| 95/9/13 | 18.54 | −0.005 379 25 | 95/11/7 | 17.65 | −0.003 393 67 |
| 95/9/14 | 18.85 | 0.016 582 4 | 95/11/8 | 17.82 | 0.009 585 64 |
| 95/9/15 | 18.92 | 0.003 706 65 | 95/11/9 | 17.84 | 0.001 121 71 |
| 95/9/18 | 18.93 | 0.000 528 402 | 95/11/10 | 17.83 | −0.000 560 695 |
| 95/9/19 | 18.95 | 0.001 055 97 | 95/11/13 | 17.8 | −0.001 683 97 |
| 95/9/20 | 18.69 | −0.013 815 3 | 95/11/14 | 17.82 | 0.001 122 96 |
| 95/9/21 | 17.56 | −0.062 365 | 95/11/15 | 17.93 | 0.006 153 87 |
| 95/9/22 | 17.25 | −0.017 811 4 | 95/11/16 | 18.19 | 0.014 396 7 |
| 95/9/25 | 17.47 | 0.012 673 | 95/11/17 | 18.57 | 0.020 675 4 |
| 95/9/26 | 17.33 | −0.008 046 02 | 95/11/20 | 18.06 | −0.027 847 8 |
| 95/9/27 | 17.57 | 0.013 753 8 | 95/11/21 | 17.97 | −0.004 995 85 |
| 95/9/28 | 17.76 | 0.010 755 8 | 95/11/22 | 17.96 | −0.000 556 638 |
| 95/9/29 | 17.54 | −0.012 464 8 | 95/11/23 | 17.96 | 0 |
| 95/10/2 | 17.64 | 0.005 685 06 | 95/11/24 | 17.96 | 0 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/11/27 | 18.38 | 0.023 116 1 | 96/1/19 | 18.94 | −0.012 592 |
| 95/11/28 | 18.33 | −0.002 724 06 | 96/1/22 | 18.62 | −0.017 039 8 |
| 95/11/29 | 18.26 | −0.003 826 19 | 96/1/23 | 18.06 | −0.030 536 7 |
| 95/11/30 | 18.18 | −0.004 390 79 | 96/1/24 | 18.28 | 0.012 108 |
| 95/12/1 | 18.43 | 0.013 657 7 | 96/1/25 | 17.67 | −0.033 939 3 |
| 95/12/4 | 18.63 | 0.010 793 4 | 96/1/26 | 17.73 | 0.003 389 83 |
| 95/12/5 | 18.67 | 0.002 144 77 | 96/1/29 | 17.45 | −0.015 918 5 |
| 95/12/6 | 18.77 | 0.005 341 89 | 96/1/30 | 17.56 | 0.006 283 94 |
| 95/12/7 | 18.73 | −0.002 133 33 | 96/1/31 | 17.74 | 0.010 198 4 |
| 95/12/8 | 18.97 | 0.012 732 3 | 96/2/1 | 17.71 | −0.001 692 53 |
| 95/12/11 | 18.66 | −0.016 476 6 | 96/2/2 | 17.8 | 0.005 069 01 |
| 95/12/12 | 18.73 | 0.003 744 32 | 96/2/5 | 17.54 | −0.014 714 5 |
| 95/12/13 | 19 | 0.014 312 5 | 96/2/6 | 17.69 | 0.008 515 52 |
| 95/12/14 | 19.11 | 0.005 772 78 | 96/2/7 | 17.74 | 0.002 822 47 |
| 95/12/15 | 19.51 | 0.020 715 4 | 96/2/8 | 17.76 | 0.001 126 76 |
| 95/12/18 | 19.67 | 0.008 167 48 | 96/2/9 | 17.78 | 0.001 125 49 |
| 95/12/19 | 19.12 | −0.028 359 7 | 96/2/12 | 17.97 | 0.010 629 5 |
| 95/12/20 | 18.97 | −0.007 876 12 | 96/2/13 | 18.91 | 0.050 987 2 |
| 95/12/21 | 18.96 | −0.000 527 287 | 96/2/14 | 18.96 | 0.002 640 61 |
| 95/12/22 | 19.14 | 0.009 448 89 | 96/2/15 | 19.04 | 0.004 210 53 |
| 95/12/25 | 19.14 | 0 | 96/2/16 | 19.16 | 0.006 282 74 |
| 95/12/26 | 19.27 | 0.006 769 1 | 96/2/19 | 19.16 | 0 |
| 95/12/27 | 19.5 | 0.011 865 | 96/2/20 | 21.05 | 0.094 075 8 |
| 95/12/28 | 19.36 | −0.007 205 38 | 96/2/21 | 19.71 | −0.065 774 4 |
| 95/12/29 | 19.55 | 0.009 766 2 | 96/2/22 | 19.85 | 0.007 077 89 |
| 96/1/1 | 19.55 | 0 | 96/2/23 | 19.06 | −0.040 612 1 |
| 96/1/2 | 19.81 | 0.013 211 6 | 96/2/26 | 19.39 | 0.017 165 6 |
| 96/1/3 | 19.89 | 0.004 030 23 | 96/2/27 | 19.7 | 0.015 861 2 |
| 96/1/4 | 19.91 | 0.001 005 03 | 96/2/28 | 19.29 | −0.021 031 8 |
| 96/1/5 | 20.26 | 0.017 426 4 | 96/2/29 | 19.54 | 0.012 876 8 |
| 96/1/8 | 20.26 | 0 | 96/3/1 | 19.44 | −0.005 130 85 |
| 96/1/9 | 19.95 | −0.015 419 4 | 96/3/4 | 19.2 | −0.012 422 5 |
| 96/1/10 | 19.67 | −0.014 134 5 | 96/3/5 | 19.54 | 0.017 553 4 |
| 96/1/11 | 18.79 | −0.045 769 8 | 96/3/6 | 20.19 | 0.032 723 8 |
| 96/1/12 | 18.25 | −0.029 159 7 | 96/3/7 | 19.81 | −0.019 000 6 |
| 96/1/15 | 18.38 | 0.007 098 04 | 96/3/8 | 19.61 | −0.010 147 2 |
| 96/1/16 | 18.05 | −0.018 117 4 | 96/3/11 | 19.91 | 0.015 182 5 |
| 96/1/17 | 18.52 | 0.025 705 5 | 96/3/12 | 20.46 | 0.027 249 6 |
| 96/1/18 | 19.18 | 0.035 016 8 | 96/3/13 | 20.58 | 0.005 847 97 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 96/3/14 | 21.16 | 0.027 792 9 | 96/5/8 | 21 | −0.005 224 42 |
| 96/3/15 | 21.99 | 0.038 475 2 | 96/5/9 | 20.68 | −0.015 355 4 |
| 96/3/18 | 23.27 | 0.056 577 2 | 96/5/10 | 21.01 | 0.015 831 5 |
| 96/3/19 | 24.34 | 0.044 956 1 | 96/5/13 | 21.36 | 0.016 521 5 |
| 96/3/20 | 23.06 | −0.054 021 6 | 96/5/14 | 21.42 | 0.002 805 05 |
| 96/3/21 | 21.05 | −0.091 199 | 96/5/15 | 21.48 | 0.002 797 2 |
| 96/3/22 | 21.95 | 0.041 866 6 | 96/5/16 | 20.78 | −0.033 131 3 |
| 96/3/25 | 22.4 | 0.020 293 8 | 96/5/17 | 20.64 | −0.006 760 05 |
| 96/3/26 | 22.19 | −0.009 419 22 | 96/5/20 | 22.48 | 0.085 395 1 |
| 96/3/27 | 21.79 | −0.018 190 6 | 96/5/21 | 22.65 | 0.007 533 83 |
| 96/3/28 | 21.41 | −0.017 593 | 96/5/22 | 21.4 | −0.056 768 9 |
| 96/3/29 | 21.47 | 0.002 798 51 | 96/5/23 | 21.23 | −0.007 975 65 |
| 96/4/1 | 22.26 | 0.036 134 7 | 96/5/24 | 21.32 | 0.004 230 32 |
| 96/4/2 | 22.7 | 0.019 573 6 |  | 21.32 | 0 |
| 96/4/3 | 22.27 | −0.019 124 4 | 96/5/28 | 21.11 | −0.009 898 74 |
| 96/4/4 | 22.75 | 0.021 324 7 | 96/5/29 | 20.76 | −0.016 718 8 |
| 96/4/5 | 22.75 | 0 | 96/5/30 | 19.94 | −0.040 300 3 |
| 96/4/8 | 23.03 | 0.012 232 6 | 96/5/31 | 19.76 | −0.009 068 07 |
| 96/4/9 | 23.06 | 0.001 301 8 | 96/6/3 | 19.85 | 0.004 544 31 |
| 96/4/10 | 24.21 | 0.048 666 3 | 96/6/4 | 20.44 | 0.029 289 8 |
| 96/4/11 | 25.34 | 0.045 618 4 | 96/6/5 | 19.72 | −0.035 860 4 |
| 96/4/12 | 24.29 | −0.042 319 4 | 96/6/6 | 20.05 | 0.016 595 8 |
| 96/4/15 | 25.06 | 0.031 208 2 | 96/6/7 | 20.28 | 0.011 406 |
| 96/4/16 | 24.47 | −0.023 825 1 | 96/6/10 | 20.25 | −0.001 480 39 |
| 96/4/17 | 24.67 | 0.008 140 05 | 96/6/11 | 20.1 | −0.007 434 98 |
| 96/4/18 | 23.82 | −0.035 062 4 | 96/6/12 | 20.09 | −0.000 497 636 |
| 96/4/19 | 23.95 | 0.005 442 76 | 96/6/13 | 20.01 | −0.003 990 03 |
| 96/4/22 | 24.07 | 0.004 997 93 | 96/6/14 | 20.34 | 0.016 357 2 |
| 96/4/23 | 22.7 | −0.058 601 3 | 96/6/17 | 22.14 | 0.084 796 5 |
| 96/4/24 | 22.4 | −0.013 304 | 96/6/18 | 21.46 | −0.031 195 2 |
| 96/4/25 | 22.2 | −0.008 968 67 | 96/6/19 | 20.76 | −0.033 162 7 |
| 96/4/26 | 22.32 | 0.005 390 85 | 96/6/20 | 20.65 | −0.005 312 74 |
| 96/4/29 | 22.43 | 0.004 916 21 | 96/6/21 | 19.92 | −0.035 991 1 |
| 96/4/30 | 21.2 | −0.056 398 2 | 96/6/24 | 19.98 | 0.003 007 52 |
| 96/5/1 | 20.81 | −0.018 567 5 | 96/6/25 | 19.96 | −0.001 001 5 |
| 96/5/2 | 20.86 | 0.002 399 81 | 96/6/26 | 20.65 | 0.033 985 |
| 96/5/3 | 21.18 | 0.015 223 9 | 96/6/27 | 21.02 | 0.017 759 |
| 96/5/6 | 21.04 | −0.006 631 95 | 96/6/28 | 20.92 | −0.004 768 73 |
| 96/5/7 | 21.11 | 0.003 321 47 | 96/7/1 | 21.53 | 0.028 741 7 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 96/7/2 | 21.13 | −0.018 753 5 | 96/8/26 | 21.62 | −0.015 603 8 |
| 96/7/3 | 21.21 | 0.003 778 94 | 96/8/27 | 21.56 | −0.002 779 07 |
| 96/7/4 | 21.21 | 0 | 96/8/28 | 21.71 | 0.006 933 24 |
| 96/7/5 | 21.21 | 0 | 96/8/29 | 22.15 | 0.020 064 5 |
| 96/7/8 | 21.27 | 0.002 824 86 | 96/8/30 | 22.25 | 0.004 504 51 |
| 96/7/9 | 21.41 | 0.006 560 47 | 96/9/2 | 22.25 | 0 |
| 96/7/10 | 21.55 | 0.006 517 71 | 96/9/3 | 23.4 | 0.050 394 |
| 96/7/11 | 21.95 | 0.018 391 3 | 96/9/4 | 23.24 | −0.006 861 09 |
| 96/7/12 | 21.9 | −0.002 280 5 | 96/9/5 | 23.44 | 0.008 569 03 |
| 96/7/15 | 22.48 | 0.026 139 4 | 96/9/6 | 23.85 | 0.017 340 3 |
| 96/7/16 | 22.38 | −0.004 458 32 | 96/9/9 | 23.73 | −0.005 044 15 |
| 96/7/17 | 21.8 | −0.026 257 7 | 96/9/10 | 24.12 | 0.016 301 3 |
| 96/7/18 | 21.68 | −0.005 519 79 | 96/9/11 | 24.75 | 0.025 784 1 |
| 96/7/19 | 21 | −0.031 867 7 | 96/9/12 | 25 | 0.010 050 3 |
| 96/7/22 | 21.4 | 0.018 868 5 | 96/9/13 | 24.51 | −0.019 794 6 |
| 96/7/23 | 21.01 | −0.018 392 4 | 96/9/16 | 23.19 | −0.055 36 |
| 96/7/24 | 20.68 | −0.015 831 5 | 96/9/17 | 23.31 | 0.005 161 3 |
| 96/7/25 | 20.74 | 0.002 897 15 | 96/9/18 | 23.89 | 0.024 577 5 |
| 96/7/26 | 20.11 | −0.030 847 | 96/9/19 | 23.54 | −0.014 758 9 |
| 96/7/29 | 20.28 | 0.008 417 97 | 96/9/20 | 23.63 | 0.003 815 99 |
| 96/7/30 | 20.33 | 0.002 462 45 | 96/9/23 | 23.37 | −0.011 063 9 |
| 96/7/31 | 20.42 | 0.004 417 19 | 96/9/24 | 24.07 | 0.029 513 1 |
| 96/8/1 | 21.04 | 0.029 910 6 | 96/9/25 | 24.46 | 0.016 072 9 |
| 96/8/2 | 21.34 | 0.014 157 9 | 96/9/26 | 24.16 | −0.012 340 8 |
| 96/8/5 | 21.23 | −0.005 167 97 | 96/9/27 | 24.6 | 0.018 048 1 |
| 96/8/6 | 21.13 | −0.004 721 44 | 96/9/30 | 24.38 | −0.008 983 22 |
| 96/8/7 | 21.42 | 0.013 631 2 | 96/10/1 | 24.14 | −0.009 892 91 |
| 96/8/8 | 21.55 | 0.006 050 75 | 96/10/2 | 24.05 | −0.003 735 22 |
| 96/8/9 | 21.57 | 0.000 927 644 | 96/10/3 | 24.81 | 0.031 111 8 |
| 96/8/12 | 22.22 | 0.029 689 3 | 96/10/4 | 24.73 | −0.003 229 72 |
| 96/8/13 | 22.37 | 0.006 727 99 | 96/10/7 | 25.24 | 0.020 413 |
| 96/8/14 | 22.12 | −0.011 238 6 | 96/10/8 | 25.54 | 0.011 815 8 |
| 96/8/15 | 21.9 | −0.009 995 54 | 96/10/9 | 25.07 | −0.018 573 9 |
| 96/8/16 | 22.66 | 0.034 114 6 | 96/10/10 | 24.26 | −0.032 843 |
| 96/8/19 | 23.26 | 0.026 133 9 | 96/10/11 | 24.66 | 0.016 353 6 |
| 96/8/20 | 22.86 | −0.017 346 5 | 96/10/14 | 25.62 | 0.038 190 8 |
| 96/8/21 | 21.72 | −0.051 155 2 | 96/10/15 | 25.42 | −0.007 837 03 |
| 96/8/22 | 22.3 | 0.026 353 2 | 96/10/16 | 25.17 | −0.009 883 46 |
| 96/8/23 | 21.96 | −0.015 364 1 | 96/10/17 | 25.42 | 0.009 883 46 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 96/10/18 | 25.75 | 0.012 898 4 | 96/12/12 | 23.72 | 0.014 437 6 |
| 96/10/21 | 25.92 | 0.006 580 24 | 96/12/13 | 24.47 | 0.031 129 3 |
| 96/10/22 | 25.75 | −0.006 580 24 | 96/12/16 | 25.74 | 0.050 598 3 |
| 96/10/23 | 24.86 | −0.035 174 5 | 96/12/17 | 25.71 | −0.001 166 18 |
| 96/10/24 | 24.51 | −0.014 178 9 | 96/12/18 | 26.16 | 0.017 351 5 |
| 96/10/25 | 24.86 | 0.014 178 9 | 96/12/19 | 26.57 | 0.015 551 2 |
| 96/10/28 | 24.85 | −0.000 402 334 | 96/12/20 | 25.08 | −0.057 712 |
| 96/10/29 | 24.34 | −0.020 736 7 | 96/12/23 | 24.79 | −0.011 630 4 |
| 96/10/30 | 24.28 | −0.002 468 12 | 96/12/24 | 25.1 | 0.012 427 5 |
| 96/10/31 | 23.35 | −0.039 056 | 96/12/25 | 25.1 | 0 |
| 96/11/1 | 23.03 | −0.013 799 3 | 96/12/26 | 24.92 | −0.007 197 15 |
| 96/11/4 | 22.79 | −0.010 475 9 | 96/12/27 | 25.22 | 0.011 966 6 |
| 96/11/5 | 22.64 | −0.006 603 59 | 96/12/30 | 25.37 | 0.005 930 04 |
| 96/11/6 | 22.69 | 0.002 206 05 | 96/12/31 | 25.92 | 0.021 447 5 |
| 96/11/7 | 22.74 | 0.002 201 19 |  | 25.92 | 0 |
| 96/11/8 | 23.59 | 0.036 697 4 | 97/1/2 | 25.69 | −0.008 913 06 |
| 96/11/11 | 23.37 | −0.009 369 74 | 97/1/3 | 25.59 | −0.003 900 16 |
| 96/11/12 | 23.35 | −0.000 856 164 | 97/1/6 | 26.37 | 0.030 025 4 |
| 96/11/13 | 24.12 | 0.032 444 4 | 97/1/7 | 26.23 | −0.005 323 21 |
| 96/11/14 | 24.41 | 0.011 951 5 | 97/1/8 | 26.62 | 0.014 759 |
| 96/11/15 | 24.17 | −0.009 880 69 | 97/1/9 | 26.37 | −0.009 435 81 |
| 96/11/18 | 23.88 | −0.012 070 9 | 97/1/10 | 26.09 | −0.010 674 9 |
| 96/11/19 | 24.49 | 0.025 223 6 | 97/1/13 | 25.19 | −0.035 105 |
| 96/11/20 | 23.76 | −0.030 261 4 | 97/1/14 | 25.11 | −0.003 180 92 |
| 96/11/21 | 23.84 | 0.003 361 35 | 97/1/15 | 25.95 | 0.032 905 4 |
| 96/11/22 | 23.75 | −0.003 782 31 | 97/1/16 | 25.52 | −0.016 707 2 |
| 96/11/25 | 23.49 | −0.011 007 7 | 97/1/17 | 25.41 | −0.004 319 66 |
| 96/11/26 | 23.62 | 0.005 519 01 | 97/1/20 | 25.23 | −0.007 109 03 |
| 96/11/27 | 23.75 | 0.005 488 72 | 97/1/21 | 24.8 | −0.017 190 1 |
| 96/11/28 | 23.75 | 0 | 97/1/22 | 24.24 | −0.022 839 5 |
| 96/11/29 | 23.75 | 0 | 97/1/23 | 24.18 | −0.002 478 32 |
| 96/12/2 | 24.8 | 0.043 261 1 | 97/1/24 | 24.05 | −0.005 390 85 |
| 96/12/3 | 24.93 | 0.005 228 24 | 97/1/27 | 23.94 | −0.004 584 3 |
| 96/12/4 | 24.8 | −0.005 228 24 | 97/1/28 | 23.9 | −0.001 672 24 |
| 96/12/5 | 25.58 | 0.030 967 1 | 97/1/29 | 24.47 | 0.023 569 4 |
|  | 25.62 | 0.001 562 5 | 97/1/30 | 24.87 | 0.016 214 4 |
| 96/12/9 | 25.3 | −0.012 568 9 | 97/1/31 | 24.15 | −0.029 377 9 |
| 96/12/10 | 24.42 | −0.035 401 9 | 97/2/3 | 24.15 | 0 |
| 96/12/11 | 23.38 | −0.043 521 5 | 97/2/4 | 24.02 | −0.005 397 56 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 97/2/5 | 23.91 | −0.004 590 04 | 97/4/1 | 20.28 | −0.006 389 8 |
| 97/2/6 | 23.1 | −0.034 464 2 | 97/4/2 | 19.47 | −0.040 760 4 |
| 97/2/7 | 22.23 | −0.038 389 9 | 97/4/3 | 19.47 | 0 |
| 97/2/10 | 22.46 | 0.010 293 2 | 97/4/4 | 19.12 | −0.018 139 9 |
| 97/2/11 | 22.42 | −0.001 782 53 | 97/4/7 | 19.23 | 0.005 736 65 |
| 97/2/12 | 21.86 | −0.025 294 9 | 97/4/8 | 19.35 | 0.006 220 86 |
| 97/2/13 | 22.02 | 0.007 292 65 | 97/4/9 | 19.27 | −0.004 142 94 |
| 97/2/14 | 22.41 | 0.017 556 2 | 97/4/10 | 19.57 | 0.015 448 3 |
| 97/2/17 | 22.41 | 0 | 97/4/11 | 19.53 | −0.002 046 04 |
| 97/2/18 | 22.52 | 0.004 896 52 | 97/4/14 | 19.9 | 0.018 768 |
| 97/2/19 | 22.79 | 0.011 918 | 97/4/15 | 19.83 | −0.003 523 79 |
| 97/2/20 | 21.98 | −0.036 188 9 | 97/4/16 | 19.35 | −0.024 503 5 |
| 97/2/21 | 21.39 | −0.027 209 4 | 97/4/17 | 19.42 | 0.003 611 04 |
| 97/2/24 | 20.71 | −0.032 306 8 | 97/4/18 | 19.91 | 0.024 918 7 |
| 97/2/25 | 21 | 0.013 905 8 | 97/4/21 | 20.38 | 0.023 331 9 |
| 97/2/26 | 21.11 | 0.005 224 42 | 97/4/22 | 19.6 | −0.039 024 5 |
| 97/2/27 | 20.89 | −0.010 476 3 | 97/4/23 | 19.73 | 0.006 610 75 |
| 97/2/28 | 20.3 | −0.028 649 7 | 97/4/24 | 20.03 | 0.015 090 8 |
| 97/3/3 | 20.25 | −0.002 466 09 | 97/4/25 | 19.99 | −0.001 999 |
| 97/3/4 | 20.66 | 0.020 044 7 | 97/4/28 | 19.91 | −0.004 010 03 |
| 97/3/5 | 20.49 | −0.008 262 5 | 97/4/29 | 20.44 | 0.026 271 6 |
| 97/3/6 | 20.94 | 0.021 724 2 | 97/4/30 | 20.21 | −0.011 316 2 |
| 97/3/7 | 21.28 | 0.016 106 5 | 97/5/1 | 19.91 | −0.014 955 4 |
| 97/3/10 | 20.49 | −0.037 830 7 | 97/5/2 | 19.6 | −0.015 692 6 |
| 97/3/11 | 20.11 | −0.018 719 8 | 97/5/5 | 19.63 | 0.001 529 44 |
| 97/3/12 | 20.62 | 0.025 044 3 | 97/5/6 | 19.66 | 0.001 527 11 |
| 97/3/13 | 20.7 | 0.003 872 22 | 97/5/7 | 19.62 | −0.002 036 66 |
| 97/3/14 | 21.29 | 0.028 103 8 | 97/5/8 | 20.34 | 0.036 039 9 |
| 97/3/17 | 20.92 | −0.017 531 8 | 97/5/9 | 20.43 | 0.004 415 02 |
| 97/3/18 | 22.06 | 0.053 060 4 | 97/5/12 | 21.38 | 0.045 451 5 |
| 97/3/19 | 22.04 | −0.000 907 03 | 97/5/13 | 21.37 | −0.000 467 836 |
| 97/3/20 | 22.32 | 0.012 624 2 | 97/5/14 | 21.39 | 0.000 935 454 |
| 97/3/21 | 21.51 | −0.036 965 2 | 97/5/15 | 21.3 | −0.004 216 45 |
| 97/3/24 | 21.06 | −0.021 142 4 | 97/5/16 | 22.12 | 0.037 775 1 |
| 97/3/25 | 20.99 | −0.003 329 37 | 97/5/19 | 21.59 | −0.024 251 9 |
| 97/3/26 | 20.64 | −0.016 815 2 | 97/5/20 | 21.19 | −0.018 700 9 |
| 97/3/27 | 20.7 | 0.002 902 76 | 97/5/21 | 21.86 | 0.031 129 1 |
| 97/3/28 | 20.7 | 0 | 97/5/22 | 21.86 | 0 |
| 97/3/31 | 20.41 | −0.014 108 7 | 97/5/23 | 21.63 | −0.010 577 2 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 97/5/26 | 21.63 | 0 | 97/7/18 | 19.27 | −0.036 682 7 |
| 97/5/27 | 20.79 | −0.039 609 1 | 97/7/21 | 19.18 | −0.004 681 41 |
| 97/5/28 | 20.79 | 0 | 97/7/22 | 19.08 | −0.005 227 4 |
| 97/5/29 | 20.97 | 0.008 620 74 | 97/7/23 | 19.63 | 0.028 418 3 |
| 97/5/30 | 20.88 | −0.004 301 08 | 97/7/24 | 19.77 | 0.007 106 63 |
| 97/6/2 | 21.12 | 0.011 428 7 | 97/7/25 | 19.89 | 0.006 051 46 |
| 97/6/3 | 20.33 | −0.038 122 8 | 97/7/28 | 19.81 | −0.004 030 23 |
| 97/6/4 | 20.12 | −0.010 383 3 | 97/7/29 | 19.85 | 0.002 017 15 |
| 97/6/5 | 19.66 | −0.023 128 2 | 97/7/30 | 20.3 | 0.022 416 9 |
| 97/6/6 | 18.79 | −0.045 261 3 | 97/7/31 | 20.14 | −0.007 913 |
| 97/6/9 | 18.68 | −0.005 871 38 | 97/8/1 | 20.28 | 0.006 927 29 |
| 97/6/10 | 18.67 | −0.000 535 475 | 97/8/4 | 20.75 | 0.022 911 1 |
| 97/6/11 | 18.53 | −0.007 526 92 | 97/8/5 | 20.81 | 0.002 887 39 |
| 97/6/12 | 18.69 | 0.008 597 58 | 97/8/6 | 20.46 | −0.016 961 9 |
| 97/6/13 | 18.83 | 0.007 462 72 | 97/8/7 | 20.09 | −0.018 249 6 |
| 97/6/16 | 19.01 | 0.009 513 81 | 97/8/8 | 19.54 | −0.027 758 5 |
| 97/6/17 | 19.23 | 0.011 506 4 | 97/8/11 | 19.69 | 0.007 647 25 |
| 97/6/18 | 18.79 | −0.023 146 7 | 97/8/12 | 19.99 | 0.015 121 3 |
| 97/6/19 | 18.67 | −0.006 406 86 | 97/8/13 | 20.19 | 0.009 955 28 |
| 97/6/20 | 18.55 | −0.006 448 17 | 97/8/14 | 20.08 | −0.005 463 14 |
| 97/6/23 | 19.14 | 0.031 310 6 | 97/8/15 | 20.07 | −0.000 498 132 |
| 97/6/24 | 19.03 | −0.005 763 7 | 97/8/18 | 19.91 | −0.008 004 04 |
| 97/6/25 | 19.52 | 0.025 422 9 | 97/8/19 | 20.12 | 0.010 492 2 |
| 97/6/26 | 19.09 | −0.022 274 9 | 97/8/20 | 20.06 | −0.002 986 56 |
| 97/6/27 | 19.46 | 0.019 196 4 | 97/8/21 | 19.66 | −0.020 141 7 |
| 97/6/30 | 19.8 | 0.017 320 9 | 97/8/22 | 19.7 | 0.002 032 52 |
| 97/7/1 | 20.12 | 0.016 032 4 | 97/8/25 | 19.26 | −0.022 588 2 |
| 97/7/2 | 20.34 | 0.010 875 | 97/8/26 | 19.28 | 0.001 037 88 |
| 97/7/3 | 19.56 | −0.039 102 7 | 97/8/27 | 19.73 | 0.023 072 |
| 97/7/4 | 19.56 | 0 | 97/8/28 | 19.58 | −0.007 631 68 |
| 97/7/7 | 19.52 | −0.002 047 08 | 97/8/29 | 19.61 | 0.001 531 |
| 97/7/8 | 19.73 | 0.010 700 7 | 97/9/1 | 19.61 | 0 |
| 97/7/9 | 19.46 | −0.013 779 2 | 97/9/2 | 19.65 | 0.002 037 7 |
| 97/7/10 | 19.22 | −0.012 409 7 | 97/9/3 | 19.61 | −0.002 037 7 |
| 97/7/11 | 19.33 | 0.005 706 89 | 97/9/4 | 19.4 | −0.010 766 6 |
| 97/7/14 | 18.99 | −0.017 745 8 | 97/9/5 | 19.63 | 0.011 785 9 |
| 97/7/15 | 19.67 | 0.035 182 1 | 97/9/8 | 19.45 | −0.009 211 94 |
| 97/7/16 | 19.65 | −0.001 017 29 | 97/9/9 | 19.42 | −0.001 543 61 |
| 97/7/17 | 19.99 | 0.017 154 8 | 97/9/10 | 19.42 | 0 |

（续）

| 日期 | 价格 | 对数差 | 日期 | 价格 | 对数差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 97/9/11 | 19.37 | −0.002 577 99 | 97/10/16 | 20.97 | 0.019 259 1 |
| 97/9/12 | 19.32 | −0.002 584 65 | 97/10/17 | 20.59 | −0.018 287 3 |
| 97/9/15 | 19.27 | −0.002 591 35 | 97/10/20 | 20.7 | 0.005 328 18 |
| 97/9/16 | 19.61 | 0.017 490 2 | 97/10/21 | 20.67 | −0.001 450 33 |
| 97/9/17 | 19.42 | −0.009 736 18 | 97/10/22 | 21.42 | 0.035 641 7 |
| 97/9/18 | 19.38 | −0.002 061 86 | 97/10/23 | 21.09 | −0.015 526 1 |
| 97/9/19 | 19.35 | −0.001 549 19 | 97/10/24 | 20.97 | −0.005 706 15 |
| 97/9/22 | 19.6 | 0.012 837 1 | 97/10/27 | 21.07 | 0.004 757 38 |
| 97/9/23 | 19.79 | 0.009 647 19 | 97/10/28 | 20.46 | −0.029 378 5 |
| 97/9/24 | 19.94 | 0.007 551 | 97/10/29 | 20.71 | 0.012 144 9 |
| 97/9/25 | 20.39 | 0.022 316 8 | 97/10/30 | 21.22 | 0.024 327 5 |
| 97/9/26 | 20.87 | 0.023 268 1 | 97/10/31 | 21.08 | −0.006 619 41 |
| 97/9/29 | 21.26 | 0.018 514 7 | 97/11/3 | 20.96 | −0.005 708 86 |
| 97/9/30 | 21.18 | −0.003 770 03 | 97/11/4 | 20.7 | −0.012 482 2 |
| 97/10/1 | 21.05 | −0.006 156 78 | 97/11/5 | 20.31 | −0.019 020 3 |
| 97/10/2 | 21.77 | 0.033 632 3 | 97/11/6 | 20.39 | 0.003 931 21 |
| 97/10/3 | 22.76 | 0.044 471 7 | 97/11/7 | 20.77 | 0.018 465 1 |
| 97/10/6 | 21.93 | −0.037 149 | 97/11/10 | 20.4 | −0.017 974 7 |
| 97/10/7 | 21.96 | 0.001 367 05 | 97/11/11 | 20.51 | 0.005 377 67 |
| 97/10/8 | 22.18 | 0.009 968 37 | 97/11/12 | 20.49 | −0.000 975 61 |
| 97/10/9 | 22.12 | −0.002 708 81 | 97/11/13 | 20.7 | 0.010 196 7 |
| 97/10/10 | 22.1 | −0.000 904 568 | 97/11/14 | 21 | 0.014 388 7 |
| 97/10/13 | 21.32 | −0.035 932 | 97/11/17 | 20.26 | −0.035 873 9 |
| 97/10/14 | 20.7 | −0.029 511 9 | 97/11/18 | 20.04 | −0.010 918 2 |
| 97/10/15 | 20.57 | −0.006 3 | 97/11/19 | 19.8 | −0.012 048 3 |

224~232



# 第13章 自回归模型和均值回复

## 13.1 自回归模型

令 $S_d(n)$表示证券第 $n$ 天结束时的价格. 如果我们令

$$L(n) = \log(S_d(n)),$$

那么几何布朗运动模型意味着

$$L(n) = a + L(n-1) + e(n), \tag{13-1}$$

其中 $e(n)$, $n \geqslant 1$, 是一个独立同分布随机变量序列, 它们是均值为 0, 方差为 $\sigma^2/N$($N=252$ 是一年之中交易日总天数)的正态分布, 且 $a=\mu/N$. 与以前一样, $\mu$ 是几何布朗运动的期望(或者漂移)参数, $\sigma$ 是波动参数.

考察式(13-1), 很自然地会考虑为 $L(n)$ 配置一个更一般的方程, 即下面的线性回归方程

$$L(n) = a + bL(n-1) + e(n), \tag{13-2}$$

其中 $b$ 是另一个常数, 它的值有待估计. 亦即, 代替取 $b=1$, 我们将利用数据来决定 $b$, 从而获得一个改进模型. 式(13-2)是一个经典线性回归模型, 估计 $a$, $b$ 和 $\sigma$ 的方法是熟知的. 由于在式(13-2)的线性回归模型中, 时刻 $n$ 的对数价格是由上一个时间段的对数价格来表示的, 所以它被称为一阶自回归模型.

由式(13-2)给出的自回归模型中的参数 $a$ 和 $b$, 可以依照下面的方法用历史数据来估计. 假设 $L(0)$, $L(1)$, …, $L(r)$是连续 $r$ 天证券收盘价的对数. 那么, 当已知 $a$ 和 $b$ 时, 按照此前对数价格预测的 $L(i)$值是 $a+bL(i-1)$; 因此, 通常估计 $a$ 和 $b$ 的方法是, 令它们等于使预测误差平方和最小的那些值. 也就是说, 选择适当的 $a$ 和 $b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{r}(L(i) - a - bL(i-1))^2.$$



达到最小. 现在有很多标准统计软件包可以用来计算这种最小值以及估计 $\sigma$ 的值.

**注** 仅当 $a=(r-\sigma^2/2)/N$ 并且 $b=1$ 时, 由式(13-2)给出的模型才是一个风险中性模型. 也就是说, 只有该模型为一个风险中性几何布朗运动时它才是风险中性的. 因此, 当 $a=(r-\sigma^2/2)/N$ 并且 $b=1$ 时, 如果所有的投资都按照它们期望值的现值定价, 那么就不可能存在套利机会. 然而, 如果投资者认为 $a$ 和 $b$ 还能取其他的值, 就能够进行这样的投资: 只要根据投资者对 $a$ 和 $b$ 的估计值来计算上面这些量, 尽管不能确保获利, 但是可以产生一个期望值很大而方差很小的收益.

## 13.2 用期望收益估计期权价值

假设每天的收盘价格对数服从式(13-2)，而且已经估计出来参数 $a$，$b$ 和 $\sigma$. 考虑一个期权，它的到期日是第 $n$ 个交易日. 为了估计这个期权的支付期望值，必须首先确定 $L(n)$的概率分布. 为完成这项工作，先把式(13-2)重新写成下面的形式

$$L(i)=e(i)+a+bL(i-1).$$

现在，连续使用上面的等式：首先是 $i=n$，然后是 $i=n-1$，等等，我们得到

$$\begin{aligned}L(n)&=e(n)+a+bL(n-1)\\&=e(n)+a+b[e(n-1)+a+bL(n-2)]\\&=e(n)+be(n-1)+a+ab+b^2L(n-2)\\&=e(n)+be(n-1)+a+ab+b^2[e(n-2)+a+bL(n-3)]\\&=e(n)+be(n-1)+b^2e(n-2)+a+ab+ab^2+b^3L(n-3).\end{aligned}$$

234

如此继续下去，对于任意的 $k<n$，有

$$L(n)=\sum_{i=0}^{k}b^ie(n-i)+a\sum_{i=0}^{k}b^i+b^{k+1}L(n-k-1).$$

在上面的等式中取 $k=n-1$ 得到

$$\begin{aligned}L(n)&=\sum_{i=0}^{n-1}b^ie(n-i)+a\sum_{i=0}^{n-1}b^i+b^nL(0)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}b^ie(n-i)+\frac{a(1-b^n)}{1-b}+b^nL(0).\end{aligned}\qquad(13\text{-}3)$$

注意到 $b^ie(n-i)$是均值为 0，方差是 $b^{2i}\sigma^2/N$ 的正态随机变量. 由于相互独立正态随机变量的和仍然是一个正态随机变量，所以 $\sum_{i=0}^{n-1}b^ie(n-i)$ 也是一个正态随机变量，它的期望是

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}b^ie(n-i)\Big]=\sum_{i=0}^{n-1}b^i\mathrm{E}[e(n-i)]=0\qquad(13\text{-}4)$$

方差是

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}b^ie(n-i)\Big]&=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Var}[b^ie(n-i)]\\&=\frac{\sigma^2}{N}\sum_{i=0}^{n-1}b^{2i}\\&=\frac{\sigma^2(1-b^{2n})}{N(1-b^2)}.\end{aligned}\qquad(13\text{-}5)$$

因此，由式(13-3)、式(13-4)和式(13-5)，如果在 0 时刻的对数价格是 $L(0)=g$，

那么 $L(n)$是一个均值为 $m(n)$，方差是 $v(n)$的正态随机变量，这里

$$m(n)=\frac{a(1-b^n)}{1-b}+b^n g \tag{13-6}$$

且

$$v(n)=\frac{\sigma^2(1-b^{2n})}{N(1-b^2)}. \tag{13-7}$$

235

一个买入期权(执行价是 $K$，到期日是第 $n$ 个交易日)支付的现值是

$$e^{-rn/N}(S_d(n)-K)^+=e^{-rn/N}(e^{L(n)}-K)^+,$$

其中 $r$ 和 $N$(分别)是利率和一年中的交易天数. 因为 $L(n)$是一个正态随机变量，它的均值和方差由式(13-6)和式(13-7)给出，可以证明这个支付的期望值是

$$E[e^{-rn/N}(e^{L(n)}-K)^+]$$
$$=e^{-rn/N}\left(e^{m(n)+v(n)/2}\Phi(\sqrt{v(n)}-h)-K\Phi(-h)\right), \tag{13-8}$$

其中 $\Phi$ 是标准正态分布函数，而

$$h=\frac{\log(K)-m(n)}{\sqrt{v(n)}}.$$

**例 13.2a** 假设自回归模型适用于第 12 章的原油数据，从标准统计包得到的 $a$，$b$ 和$\sigma/\sqrt{N}$的估计值是

$$a=0.048\,7,\quad b=0.983\,8,\quad \sigma/\sqrt{N}=0.019\,08.$$

即估计自回归方程是

$$L(n)=0.048\,7+0.983\,8L(n-1)+e(n),$$

其中 $e(n)$是一个期望为 0，标准差是 0.019 08 的正态随机变量. 因此，如果现在的价格是 20，那么再过 50 个交易日后，在该天结束时价格的对数也是一个正态随机变量，它的期望是

$$m(50)=\frac{0.048\,7(1-(0.983\,8)^{50})}{1-0.983\,8}+\log(20)(0.983\,8)^{50}=3.001\,6$$

方差是

$$v(50)=(0.019\,1)^2\frac{1-(0.983\,8)^{100}}{1-(0.983\,8)^2}=0.009\,1.$$

假设现在的利率是 8%，对一个在 50 个交易日后以执行价 $K=21$ 购买的该证券期权，我们来求它支付的期望现值. 因为

236

$$h=\frac{\log(21)-3.001\,6}{\sqrt{0.009\,1}}=0.449\,9,$$

所以根据式(13-8)，期望支付的当前价值是

$$e^{-0.08(50)/252}(20.2094\Phi(-0.3545)-21\Phi(-0.4499))=0.4442.$$

即，支付的期望现值是 44.42 美分.

把上面的结果与几何布朗运动 Black-Scholes 期权价格相比较是很有趣的. 利用 7.2 节中的记号，原油价格数据集可产生下面波动参数的估计值

$$\sigma=0.3032\quad(\sigma/\sqrt{N}=0.01910).$$

由于它给出了 $\omega=-0.1762$ 和 $\sigma\sqrt{t}=0.1351$，因此由 Black-Scholes 公式得到的价格是

$$C=20\Phi(-0.1762)-21e^{-4/252}\Phi(-0.3113)=0.7911.$$

由此可见几何布朗运动的风险中性价格 79 美分要比假设是自回归模型时的期望支付现值 44 美分大得多. 产生这个差异的一个主要原因是，在风险中性几何布朗运动模型下最后的价格对数的方差是 0.01824，而在自回归模型中这个方差是 0.0091.（在到期时价格对数的期望则是几乎相等的：在风险中性几何布朗运动模型下它是 3.0025，而在自回归模型下是 3.0016.）

还可做些别的比较. 通过模拟曾得到下述结果：当用样本均值来作为漂移参数的估计量时，在第 12 章的模型下，期权支付的期望现值是 64 美分，而使用风险中性方法得到的是 81 美分. □

## 13.3 均值回复

许多交易商认为，某些证券(通常还有商品)的价格倾向于回复到某个固定的值. 也就是说，当价格比该值小时，会有上升的趋势；而当价格比它大时，就会有下降的倾向. 尽管这个称为均值回复的现象不能用几何布朗运动模型来解释，但它却是自回归模型的一个非常简单的推论. 比如考虑模型

237

$$L(n)=a+bL(n-1)+e(n),$$

它等价于

$$S_d(n)=e^{a+e(n)}(S_d(n-1))^b.$$

因为

$$E[e^{a+e(n)}]=e^{a+\sigma^2/2N}$$

所以，如果在第 $n-1$ 天结束时证券的价格是 $s$，那么在下一天结束时证券的期望价格就是

$$E[S_d(n)]=e^{a+\sigma^2/2N}s^b. \tag{13-9}$$

由于假设了 $0<b<1$，故令

$$s^*=\exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\}.$$

我们将证明，如果当前价格是 $s$，那么第二天结束时的期望价格会在 $s$ 和 $s^*$ 之间.

为了证明此结果，首先假设 $s<s^*$，也就是说，

$$s < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\}, \tag{13-10}$$

这就意味着

$$s^{1-b} < \exp\{a+\sigma^2/2N\}$$

或者

$$s < \exp\{a+\sigma^2/2N\}s^b = E[S_d(n)]. \tag{13-11}$$

此外，式(13-10)也意味着

$$s^b < \exp\left\{\frac{b(a+\sigma^2/2N)}{1-b}\right\}$$

238

或者

$$s^b < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}-(a+\sigma^2/2N)\right\},$$

它等价于

$$E[S_d(n)] = \exp\{a+\sigma^2/2N\}s^b < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\} = s^*. \tag{13-12}$$

因此，从式(13-11)和式(13-12)我们知道，如果 $S_d(n-1)=s<s^*$，那么

$$s < E[S_d(n)] < s^*.$$

用类似的方法可以得到如果 $S_d(n-1)=s>s^*$，那么

$$s^* < E[S_d(n)] < s.$$

所以，如果 $0<b<1$，那么对于当前的任何价格 $s$，第二天结束时的平均价格会介于 $s$ 和 $s^*$ 之间．也就是说，存在一个指向价格 $s^*$ 的均值回复．

**例 13.3a** 对于例 13.2a 中的数据，估值回归方程为

$$L(n) = 0.0487 + 0.9838L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$ 是一个均值是 0，标准差是 0.019 1 的正态随机变量．因为待估计的 $b$ 值小于 1，这个模型预测了一个指向下面价格的均值回复：

$$s^* = \exp\left\{\frac{0.0487+(0.0191)^2/2}{1-0.9838}\right\} = 20.44. \qquad \square$$

## 13.4 习题

**练习 13.1** 对于模型

$$L(n) = 5 + 0.8L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$ 是一个均值是 0 方差是 0.2 的正态随机变量，求 $L(n+10) > L(n)$ 的

239 概率.

**练习 13.2** 令 $L(n)$表示一个证券在第 $n$ 天结束时的价格对数，并且假设

$$L(n) = 1.2 + 0.7L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$是一个均值为 0，方差是 0.1 的正态随机变量. 求当利率为 10%时，一个 60 个交易日后到期，执行价是 50 的买入期权支付的期望现值. 设这个证券当前的价格是：a)48；b)50；c)52.

**练习 13.3** 对燃料油的前 100 个数据值(见表 13-1)，应用统计软件包来拟合一个自回归模型.

**练习 13.4** 在练习 13.2 中，证券的期望价格会回复到什么值？

**练习 13.5** 对于 13.3 节中的模型，证明如果 $S_d(n-1)=s>s^*$，那么

$$s^* < E[S_d(n)] < s.$$

**练习 13.6** 对于 13.3 节中的模型，证明如果 $S_d(n-1)=s^*$，那么有

240
$$E[S_d(n)]=s^*.$$



表 13-1 最近月期商品价格(美元)

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/1/3 | 52.75 | 49.94 | 95/2/27 | 58.97 | 47.19 |
| 95/1/4 | 53.43 | 49.64 | 95/2/28 | 57.58 | 46.9 |
| 95/1/5 | 54.51 | 49.96 | 95/3/1 | 56.74 | 46.44 |
| 95/1/6 | 53.77 | 49.52 | 95/3/2 | 55.59 | 46.52 |
| 95/1/9 | 53.9 | 48.33 | 95/3/3 | 55.94 | 47.41 |
| 95/1/10 | 53.66 | 47.38 | 95/3/6 | 56.21 | 46.66 |
| 95/1/11 | 54.54 | 47.98 | 95/3/7 | 56.78 | 46.36 |
| 95/1/12 | 54.92 | 47.85 | 95/3/8 | 55.83 | 45.25 |
| 95/1/13 | 55 | 46.68 | 95/3/9 | 54.35 | 45.14 |
| 95/1/16 | 56.88 | 47.35 | 95/3/10 | 52.47 | 45.25 |
| 95/1/17 | 57.8 | 48.67 | 95/3/13 | 53.81 | 45.61 |
| 95/1/18 | 59.48 | 49.08 | 95/3/14 | 52.79 | 44.34 |
| 95/1/19 | 58.12 | 48.28 | 95/3/15 | 54.04 | 45.14 |
| 95/1/20 | 57.4 | 48.14 | 95/3/16 | 54.93 | 45.37 |
| 95/1/23 | 56.38 | 47.82 | 95/3/17 | 55.37 | 46.07 |
| 95/1/24 | 57.6 | 47.87 | 95/3/20 | 56.15 | 45.85 |
| 95/1/25 | 57.25 | 47.47 | 95/3/21 | 56.15 | 45.65 |
| 95/1/26 | 57.44 | 47.27 | 95/3/22 | 55.9 | 47.02 |
| 95/1/27 | 56.07 | 47.27 | 95/3/23 | 57.53 | 46.56 |
| 95/1/30 | 56.21 | 47.42 | 95/3/24 | 57.82 | 46.32 |
| 95/1/31 | 57.76 | 46.86 | 95/3/27 | 58.6 | 47.46 |
| 95/2/1 | 56.77 | 47.8 | 95/3/28 | 58.73 | 47.46 |
| 95/2/2 | 55.95 | 48.55 | 95/3/29 | 59.99 | 47.08 |
| 95/2/3 | 57.35 | 49.44 | 95/3/30 | 60.68 | 47.19 |
| 95/2/6 | 57.3 | 49.2 | 95/3/31 | 59.47 | 47.06 |
| 95/2/7 | 56.99 | 49.13 | 95/4/3 | 57.44 | 47.47 |
| 95/2/8 | 56.1 | 47.98 | 95/4/4 | 58.6 | 47.96 |
| 95/2/9 | 55.84 | 47.65 | 95/4/5 | 60.48 | 48.01 |
| 95/2/10 | 55.64 | 48.28 | 95/4/6 | 61.68 | 49.21 |
| 95/2/13 | 55.56 | 47.29 | 95/4/7 | 61.29 | 49.5 |
| 95/2/14 | 56.16 | 47.5 | 95/4/10 | 61.22 | 49.28 |
| 95/2/15 | 56.22 | 46.89 | 95/4/11 | 61.59 | 50.15 |
| 95/2/16 | 57.91 | 46.92 | 95/4/12 | 61.37 | 49.54 |
| 95/2/17 | 58.76 | 47.72 | 95/4/13 | 60.44 | 48.79 |
| 95/2/20 | 58.76 | 47.72 | 95/4/14 | 60.44 | 48.79 |
| 95/2/21 | 59.11 | 47.62 | 95/4/17 | 62.03 | 50.01 |
| 95/2/22 | 59.84 | 47.89 | 95/4/18 | 63.69 | 50.19 |
| 95/2/23 | 58.36 | 47.44 | 95/4/19 | 63.15 | 50.15 |
| 95/2/24 | 58.76 | 47.75 | 95/4/20 | 63.22 | 50.28 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/4/21 | 63.2 | 50.64 | 95/6/15 | 61.87 | 48.88 |
| 95/4/24 | 62.21 | 50.02 | 95/6/16 | 61.5 | 48.29 |
| 95/4/25 | 62.91 | 50.78 | 95/6/19 | 60.28 | 47 |
| 95/4/26 | 63.81 | 50.45 | 95/6/20 | 60.15 | 47.14 |
| 95/4/27 | 64.96 | 51.26 | 95/6/21 | 58.73 | 46.54 |
| 95/4/28 | 65.33 | 51.19 | 95/6/22 | 58.33 | 46.65 |
| 95/5/1 | 64.15 | 51.09 | 95/6/23 | 56.98 | 46.31 |
| 95/5/2 | 63.65 | 50.95 | 95/6/26 | 56.71 | 46.78 |
| 95/5/3 | 62.55 | 50.25 | 95/6/27 | 57.38 | 47.23 |
| 95/5/4 | 63.59 | 51.27 | 95/6/28 | 59.59 | 47.69 |
| 95/5/5 | 63.99 | 51.34 | 95/6/29 | 59.01 | 46.92 |
| 95/5/8 | 64.21 | 51.15 | 95/6/30 | 59.15 | 46.72 |
| 95/5/9 | 62.56 | 49.14 | 95/7/3 | 59.15 | 46.72 |
| 95/5/10 | 63.29 | 49.95 | 95/7/4 | 59.15 | 46.72 |
| 95/5/11 | 63.28 | 49.09 | 95/7/5 | 54.37 | 46.51 |
| 95/5/12 | 63.67 | 49.54 | 95/7/6 | 54.74 | 47.19 |
| 95/5/15 | 64.9 | 49.86 | 95/7/7 | 53.8 | 46.37 |
| 95/5/16 | 66.3 | 50.45 | 95/7/10 | 54.74 | 47.1 |
| 95/5/17 | 66.76 | 50.4 | 95/7/11 | 54.19 | 46.96 |
| 95/5/18 | 66.5 | 50.56 | 95/7/12 | 54.96 | 47.23 |
| 95/5/19 | 66.34 | 51.01 | 95/7/13 | 54.39 | 46.68 |
| 95/5/22 | 66.46 | 51.29 | 95/7/14 | 54.54 | 46.53 |
| 95/5/23 | 66.15 | 52.29 | 95/7/17 | 53.98 | 46.49 |
| 95/5/24 | 64.93 | 51.13 | 95/7/18 | 53.58 | 46.98 |
| 95/5/25 | 65.81 | 51.25 | 95/7/19 | 52.69 | 46.47 |
| 95/5/26 | 64.07 | 48.72 | 95/7/20 | 52.18 | 46.1 |
| 95/5/29 | 64.07 | 48.72 | 95/7/21 | 52.05 | 46.14 |
| 95/5/30 | 63.5 | 48.56 | 95/7/24 | 53.26 | 46.56 |
| 95/5/31 | 63 | 48.47 | 95/7/25 | 52.37 | 46.51 |
| 95/6/1 | 59.78 | 49.53 | 95/7/26 | 52.89 | 48.62 |
| 95/6/2 | 60.94 | 49.9 | 95/7/27 | 53.69 | 48.13 |
| 95/6/5 | 61.79 | 49.6 | 95/7/28 | 53.75 | 48 |
| 95/6/6 | 61.39 | 49.1 | 95/7/31 | 54.08 | 48.27 |
| 95/6/7 | 61.77 | 48.95 | 95/8/1 | 54.35 | 48.79 |
| 95/6/8 | 60.64 | 48.65 | 95/8/2 | 54.44 | 49.44 |
| 95/6/9 | 60.8 | 48.1 | 95/8/3 | 53.93 | 49.24 |
| 95/6/12 | 61.15 | 48.5 | 95/8/4 | 53.97 | 49.18 |
| 95/6/13 | 60.93 | 48.53 | 95/8/7 | 54.05 | 49.32 |
| 95/6/14 | 62 | 49.19 | 95/8/8 | 54.38 | 49.7 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/8/9 | 54.78 | 49.45 | 95/10/3 | 51.93 | 49.28 |
| 95/8/10 | 55.65 | 49.55 | 95/10/4 | 50.74 | 48.85 |
| 95/8/11 | 55.72 | 49.38 | 95/10/5 | 48.89 | 47.97 |
| 95/8/14 | 55.23 | 48.77 | 95/10/6 | 49.15 | 48.21 |
| 95/8/15 | 54.82 | 48.74 | 95/10/9 | 50.24 | 48.74 |
| 95/8/16 | 53.92 | 49.22 | 95/10/10 | 50.33 | 48.67 |
| 95/8/17 | 54.29 | 49.27 | 95/10/11 | 50.48 | 48.8 |
| 95/8/18 | 54.23 | 49.7 | 95/10/12 | 49.86 | 48.46 |
| 95/8/21 | 54.46 | 50.29 | 95/10/13 | 50.29 | 48.92 |
| 95/8/22 | 54.57 | 50.18 | 95/10/16 | 50.7 | 48.85 |
| 95/8/23 | 55.27 | 50.5 | 95/10/17 | 50.33 | 48.82 |
| 95/8/24 | 55.86 | 50.2 | 95/10/18 | 49.88 | 48.42 |
| 95/8/25 | 55.97 | 49.97 | 95/10/19 | 49.36 | 48.15 |
| 95/8/28 | 55.62 | 49.8 | 95/10/20 | 49.7 | 48.58 |
| 95/8/29 | 55.51 | 49.52 | 95/10/23 | 49.81 | 48.94 |
| 95/8/30 | 56.45 | 49.65 | 95/10/24 | 49.37 | 49.36 |
| 95/8/31 | 56.25 | 50.15 | 95/10/25 | 49.69 | 49.58 |
| 95/9/1 | 54.25 | 51.43 | 95/10/26 | 50 | 50.44 |
| 95/9/4 | 54.25 | 51.43 | 95/10/27 | 50.06 | 50.34 |
| 95/9/5 | 56.23 | 52.97 | 95/10/30 | 50.74 | 50.59 |
| 95/9/6 | 55.32 | 52.11 | 95/10/31 | 50.83 | 50.4 |
| 95/9/7 | 54.55 | 51.44 | 95/11/1 | 50.55 | 50.95 |
| 95/9/8 | 54.79 | 51.83 | 95/11/2 | 51.72 | 52.04 |
| 95/9/11 | 54.92 | 51.65 | 95/11/3 | 51.51 | 51.72 |
| 95/9/12 | 55.74 | 51.95 | 95/11/6 | 51.03 | 51.15 |
| 95/9/13 | 55.34 | 51.25 | 95/11/7 | 51.14 | 50.99 |
| 95/9/14 | 56.81 | 51.8 | 95/11/8 | 51.42 | 51.45 |
| 95/9/15 | 56.63 | 51.53 | 95/11/9 | 51.06 | 51.62 |
| 95/9/18 | 57.73 | 51.65 | 95/11/10 | 50.7 | 51.63 |
| 95/9/19 | 57.23 | 51.37 | 95/11/13 | 50.3 | 51.57 |
| 95/9/20 | 56.39 | 49.3 | 95/11/14 | 50.43 | 51.56 |
| 95/9/21 | 54.87 | 48.67 | 95/11/15 | 51.24 | 51.71 |
| 95/9/22 | 53.49 | 48.09 | 95/11/16 | 51.55 | 52.22 |
| 95/9/25 | 54.01 | 48.85 | 95/11/17 | 52.79 | 52.96 |
| 95/9/26 | 53.79 | 48.23 | 95/11/20 | 52.9 | 52.73 |
| 95/9/27 | 54.55 | 49.02 | 95/11/21 | 53.12 | 52.28 |
| 95/9/28 | 56.05 | 49.5 | 95/11/22 | 54.12 | 52.54 |
| 95/9/29 | 57.67 | 48.65 | 95/11/23 | 54.12 | 52.54 |
| 95/10/2 | 52.78 | 49.26 | 95/11/24 | 54.12 | 52.54 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 95/11/27 | 55.45 | 53.42 | 96/1/19 | 55.41 | 54.22 |
| 95/11/28 | 56.24 | 52.95 | 96/1/22 | 54.88 | 53.67 |
| 95/11/29 | 57.45 | 52.2 | 96/1/23 | 53.66 | 52.95 |
| 95/11/30 | 57.36 | 51.62 | 96/1/24 | 54.2 | 52.72 |
| 95/12/1 | 53.02 | 52.67 | 96/1/25 | 52.67 | 50.51 |
| 95/12/4 | 53.56 | 54.03 | 96/1/26 | 52.97 | 50.93 |
| 95/12/5 | 54 | 54.22 | 96/1/29 | 52.46 | 51.13 |
| 95/12/6 | 53.89 | 54.75 | 96/1/30 | 53.37 | 52.28 |
| 95/12/7 | 54.06 | 55.28 | 96/1/31 | 54.1 | 53.51 |
| 95/12/8 | 54.65 | 56.59 | 96/2/1 | 53.14 | 52.41 |
| 95/12/11 | 54.69 | 56.75 | 96/2/2 | 53.74 | 53.26 |
| 95/12/12 | 55.58 | 56.81 | 96/2/5 | 52.06 | 51.6 |
| 95/12/13 | 57.55 | 57.69 | 96/2/6 | 52.38 | 51.64 |
| 95/12/14 | 57.86 | 57.3 | 96/2/7 | 52.23 | 52.46 |
| 95/12/15 | 59.59 | 57.99 | 96/2/8 | 52.44 | 53.14 |
| 95/12/18 | 59.93 | 59.11 | 96/2/9 | 52.91 | 53.62 |
| 95/12/19 | 59.26 | 59.23 | 96/2/12 | 53 | 53.69 |
| 95/12/20 | 57.75 | 59.9 | 96/2/13 | 55.11 | 56.74 |
| 95/12/21 | 56.91 | 60.01 | 96/2/14 | 55.2 | 58.21 |
| 95/12/22 | 57.59 | 60.09 | 96/2/15 | 55.44 | 57 |
| 95/12/25 | 57.59 | 60.09 | 96/2/16 | 55.77 | 56.87 |
| 95/12/26 | 58.69 | 60.5 | 96/2/19 | 55.77 | 56.87 |
| 95/12/27 | 60.26 | 62.33 | 96/2/20 | 57.71 | 56.39 |
| 95/12/28 | 59.28 | 60.32 | 96/2/21 | 59.45 | 58.84 |
| 95/12/29 | 58.6 | 58.63 | 96/2/22 | 60.04 | 60.53 |
| 96/1/1 | 58.6 | 58.63 | 96/2/23 | 58.73 | 60.66 |
| 96/1/2 | 59.09 | 59.93 | 96/2/26 | 59.76 | 62.85 |
| 96/1/3 | 58.74 | 59.44 | 96/2/27 | 60.31 | 64.28 |
| 96/1/4 | 59.44 | 59.28 | 96/2/28 | 59.46 | 59.68 |
| 96/1/5 | 60.48 | 60.64 | 96/2/29 | 59.35 | 61.81 |
| 96/1/8 | 60.48 | 60.64 | 96/3/1 | 59.75 | 53.42 |
| 96/1/9 | 59.65 | 60.43 | 96/3/4 | 58.73 | 52.15 |
| 96/1/10 | 58.19 | 59.59 | 96/3/5 | 59.09 | 53 |
| 96/1/11 | 54.44 | 56.16 | 96/3/6 | 59.75 | 54.22 |
| 96/1/12 | 53.1 | 53.57 | 96/3/7 | 59.18 | 53.78 |
| 96/1/15 | 53.9 | 53.3 | 96/3/8 | 58.75 | 53.44 |
| 96/1/16 | 53.33 | 52.43 | 96/3/11 | 59.32 | 55.15 |
| 96/1/17 | 54.98 | 53.13 | 96/3/12 | 60.56 | 54.83 |
| 96/1/18 | 55.21 | 54.37 | 96/3/13 | 61.61 | 54.59 |

(续)

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 96/3/14 | 62.45 | 55.07 | 96/5/8 | 68.37 | 54.87 |
| 96/3/15 | 62.92 | 57.87 | 96/5/9 | 67.23 | 54.56 |
| 96/3/18 | 64.31 | 60.28 | 96/5/10 | 68.48 | 54.95 |
| 96/3/19 | 65.15 | 62.26 | 96/5/13 | 69.11 | 56.19 |
| 96/3/20 | 64.38 | 63.12 | 96/5/14 | 68.43 | 55.32 |
| 96/3/21 | 64.03 | 61.33 | 96/5/15 | 67.2 | 54.81 |
| 96/3/22 | 65.49 | 62.65 | 96/5/16 | 64.2 | 53 |
| 96/3/25 | 67 | 63.2 | 96/5/17 | 63.03 | 52.94 |
| 96/3/26 | 66.25 | 64.88 | 96/5/20 | 66.04 | 55.24 |
| 96/3/27 | 65.72 | 65.93 | 96/5/21 | 64.95 | 54.06 |
| 96/3/28 | 64.44 | 63.54 | 96/5/22 | 64.3 | 54.99 |
| 96/3/29 | 64.94 | 62.76 | 96/5/23 | 64.25 | 54.39 |
| 96/4/1 | 66 | 57.98 | 96/5/24 | 64.72 | 54.46 |
| 96/4/2 | 68.11 | 59.72 | 96/5/27 | 64.72 | 54.46 |
| 96/4/3 | 67.69 | 58.22 | 96/5/28 | 63.15 | 54.18 |
| 96/4/4 | 68.76 | 59.57 | 96/5/29 | 62.36 | 54.06 |
| 96/4/5 | 68.76 | 59.57 | 96/5/30 | 59.88 | 52.09 |
| 96/4/8 | 69.86 | 60.19 | 96/5/31 | 59.12 | 50.85 |
| 96/4/9 | 70.52 | 60.64 | 96/6/3 | 58.99 | 51.25 |
| 96/4/10 | 72.99 | 62.51 | 96/6/4 | 60.69 | 51.52 |
| 96/4/11 | 74.3 | 64.02 | 96/6/5 | 59.39 | 50.85 |
| 96/4/12 | 72.17 | 62.02 | 96/6/6 | 60.22 | 51.04 |
| 96/4/15 | 71.71 | 62.62 | 96/6/7 | 60.91 | 51.78 |
| 96/4/16 | 69.45 | 59.54 | 96/6/10 | 61.4 | 51.4 |
| 96/4/17 | 68.12 | 58.09 | 96/6/11 | 60.8 | 50.79 |
| 96/4/18 | 66.4 | 55.4 | 96/6/12 | 59.68 | 50.88 |
| 96/4/19 | 67.49 | 55.72 | 96/6/13 | 58.89 | 50.95 |
| 96/4/22 | 70.19 | 55.06 | 96/6/14 | 59.5 | 51.55 |
| 96/4/23 | 73.18 | 57.3 | 96/6/17 | 61.21 | 53.34 |
| 96/4/24 | 74.1 | 58.2 | 96/6/18 | 60.24 | 52.5 |
| 96/4/25 | 75.61 | 58.76 | 96/6/19 | 57.96 | 51.12 |
| 96/4/26 | 76.81 | 59.27 | 96/6/20 | 58.68 | 51.53 |
| 96/4/29 | 77.01 | 62.28 | 96/6/21 | 58.74 | 51.36 |
| 96/4/30 | 72.39 | 61.82 | 96/6/24 | 58.23 | 51.3 |
| 96/5/1 | 67.42 | 54.16 | 96/6/25 | 57.46 | 51.17 |
| 96/5/2 | 68.4 | 53.94 | 96/6/26 | 58.36 | 52.34 |
| 96/5/3 | 69.92 | 54.74 | 96/6/27 | 59.36 | 53.64 |
| 96/5/6 | 68.85 | 54.56 | 96/6/28 | 60.03 | 53.95 |
| 96/5/7 | 68.81 | 54.79 | 96/7/1 | 61.51 | 55.14 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|
| 96/7/2 | 60.89 | 54.28 |
| 96/7/3 | 62.47 | 54.71 |
| 96/7/4 | 62.47 | 54.71 |
| 96/7/5 | 62.47 | 54.71 |
| 96/7/8 | 61.68 | 54.89 |
| 96/7/9 | 61.81 | 55.26 |
| 96/7/10 | 63.11 | 55.59 |
| 96/7/11 | 64.59 | 56.7 |
| 96/7/12 | 64 | 56.62 |
| 96/7/15 | 65.56 | 57.72 |
| 96/7/16 | 65.13 | 57.18 |
| 96/7/17 | 63.89 | 56.32 |
| 96/7/18 | 63.87 | 56.74 |
| 96/7/19 | 62.41 | 56.02 |
| 96/7/22 | 62.76 | 55.85 |
| 96/7/23 | 63.08 | 55.94 |
| 96/7/24 | 61.87 | 55.95 |
| 96/7/25 | 61.66 | 56.25 |
| 96/7/26 | 60.16 | 55.04 |
| 96/7/29 | 60.52 | 55.19 |
| 96/7/30 | 61.23 | 55.65 |
| 96/7/31 | 61.8 | 57.08 |
| 96/8/1 | 61.38 | 57.53 |
| 96/8/2 | 62.12 | 58.71 |
| 96/8/5 | 61.31 | 58.29 |
| 96/8/6 | 61.23 | 57.43 |
| 96/8/7 | 62 | 58.22 |
| 96/8/8 | 62.27 | 58.79 |
| 96/8/9 | 61.87 | 58.49 |
| 96/8/12 | 62.89 | 59.56 |
| 96/8/13 | 63.09 | 60.01 |
| 96/8/14 | 62.49 | 60.41 |
| 96/8/15 | 61.96 | 59.68 |
| 96/8/16 | 63.38 | 61.63 |
| 96/8/19 | 65.27 | 62.58 |
| 96/8/20 | 64.01 | 61.67 |
| 96/8/21 | 63.12 | 60.98 |
| 96/8/22 | 63.88 | 62.48 |
| 96/8/23 | 63.22 | 61.99 |
| 96/8/26 | 61.62 | 61.03 |
| 96/8/27 | 61.21 | 61.13 |
| 96/8/28 | 62.33 | 62.04 |
| 96/8/29 | 63.72 | 63.67 |
| 96/8/30 | 62.82 | 62.82 |
| 96/9/2 | 62.82 | 62.82 |
| 96/9/3 | 62.96 | 65.07 |
| 96/9/4 | 62.96 | 64.21 |
| 96/9/5 | 64.41 | 65.03 |
| 96/9/6 | 65.27 | 66.4 |
| 96/9/9 | 64.09 | 65.95 |
| 96/9/10 | 64.85 | 66.67 |
| 96/9/11 | 65.91 | 68.19 |
| 96/9/12 | 65.91 | 69.17 |
| 96/9/13 | 64.6 | 67.94 |
| 96/9/16 | 62.87 | 65.29 |
| 96/9/17 | 62.74 | 65.59 |
| 96/9/18 | 63.06 | 67.87 |
| 96/9/19 | 61.32 | 66.77 |
| 96/9/20 | 61.09 | 67.42 |
| 96/9/23 | 60.07 | 67.48 |
| 96/9/24 | 62.83 | 69.69 |
| 96/9/25 | 63.1 | 71.77 |
| 96/9/26 | 62.99 | 70.9 |
| 96/9/27 | 64.6 | 71.49 |
| 96/9/30 | 62.71 | 71.51 |
| 96/10/1 | 62.82 | 70.76 |
| 96/10/2 | 62.42 | 71.98 |
| 96/10/3 | 63.68 | 74.69 |
| 96/10/4 | 63.63 | 74.43 |
| 96/10/7 | 66.34 | 76.49 |
| 96/10/8 | 66.5 | 76.19 |
| 96/10/9 | 65.59 | 73.97 |
| 96/10/10 | 63.52 | 70.92 |
| 96/10/11 | 65.52 | 71.43 |
| 96/10/14 | 67.7 | 74.07 |
| 96/10/15 | 67.08 | 73.07 |
| 96/10/16 | 65.45 | 71.56 |
| 96/10/17 | 66.53 | 72.29 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|
| 96/10/18 | 67.94 | 74.06 |
| 96/10/21 | 67.92 | 73.63 |
| 96/10/22 | 69.12 | 73.45 |
| 96/10/23 | 68.16 | 70.96 |
| 96/10/24 | 69.22 | 70.49 |
| 96/10/25 | 70.1 | 71.72 |
| 96/10/28 | 70.3 | 71.46 |
| 96/10/29 | 69.1 | 69.83 |
| 96/10/30 | 70 | 68.46 |
| 96/10/31 | 66.56 | 66.34 |
| 96/11/1 | 64.7 | 66.6 |
| 96/11/4 | 65 | 65.95 |
| 96/11/5 | 64.61 | 65.42 |
| 96/11/6 | 63.63 | 66.45 |
| 96/11/7 | 63.8 | 66.89 |
| 96/11/8 | 65.27 | 68.93 |
| 96/11/11 | 65.02 | 68.35 |
| 96/11/12 | 65.77 | 68.25 |
| 96/11/13 | 68.34 | 71.2 |
| 96/11/14 | 68.92 | 73.4 |
| 96/11/15 | 66.92 | 72.61 |
| 96/11/18 | 65.77 | 71.85 |
| 96/11/19 | 67.39 | 73.68 |
| 96/11/20 | 65.39 | 72.09 |
| 96/11/21 | 67.04 | 73.85 |
| 96/11/22 | 67.8 | 72.79 |
| 96/11/25 | 67.99 | 72.23 |
| 96/11/26 | 69.01 | 71.24 |
| 96/11/27 | 69.35 | 71.97 |
| 96/11/28 | 69.35 | 71.97 |
| 96/11/29 | 69.35 | 71.97 |
| 96/12/2 | 68.12 | 73.57 |
| 96/12/3 | 69.13 | 74.22 |
| 96/12/4 | 68.24 | 73.57 |
| 96/12/5 | 69.68 | 75.11 |
| 96/12/6 | 69.8 | 74.66 |
| 96/12/9 | 68.88 | 72.13 |
| 96/12/10 | 66.86 | 69.62 |
| 96/12/11 | 63.56 | 66.82 |
| 96/12/12 | 64.72 | 68.67 |
| 96/12/13 | 67.04 | 71.71 |
| 96/12/16 | 69.52 | 74.82 |
| 96/12/17 | 69.77 | 73.54 |
| 96/12/18 | 71.17 | 74.18 |
| 96/12/19 | 71.22 | 73.78 |
| 96/12/20 | 70.19 | 72.97 |
| 96/12/23 | 68.9 | 71.08 |
| 96/12/24 | 69.56 | 71.4 |
| 96/12/25 | 69.56 | 71.4 |
| 96/12/26 | 69.51 | 70.06 |
| 96/12/27 | 69.74 | 70.55 |
| 96/12/30 | 69.61 | 70.57 |
| 96/12/31 | 70.67 | 72.84 |
| 97/1/1 | 70.67 | 72.84 |
| 97/1/2 | 71.1 | 72.11 |
| 97/1/3 | 70.7 | 71.29 |
| 97/1/6 | 72.52 | 73.64 |
| 97/1/7 | 72.1 | 72.49 |
| 97/1/8 | 72.19 | 73.43 |
| 97/1/9 | 70.48 | 73.05 |
| 97/1/10 | 70.36 | 72.15 |
| 97/1/13 | 68.09 | 69.7 |
| 97/1/14 | 67.04 | 69.42 |
| 97/1/15 | 68.85 | 71.42 |
| 97/1/16 | 68.69 | 69.92 |
| 97/1/17 | 68.09 | 68.44 |
| 97/1/20 | 67.23 | 66.94 |
| 97/1/21 | 67.44 | 66.03 |
| 97/1/22 | 68.22 | 66.89 |
| 97/1/23 | 68.42 | 66.35 |
| 97/1/24 | 67.75 | 66.77 |
| 97/1/27 | 67.62 | 67.29 |
| 97/1/28 | 67.04 | 66.83 |
| 97/1/29 | 68.23 | 68.84 |
| 97/1/30 | 69.82 | 70.34 |
| 97/1/31 | 68.47 | 68.65 |
| 97/2/3 | 68.35 | 65.28 |
| 97/2/4 | 68.31 | 64.18 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 97/2/5 | 67.54 | 63.32 | 97/4/1 | 62.67 | 53.95 |
| 97/2/6 | 65.3 | 61.45 | 97/4/2 | 60.61 | 52.52 |
| 97/2/7 | 63.06 | 60.53 | 97/4/3 | 60.9 | 53.26 |
| 97/2/10 | 63.53 | 61.76 | 97/4/4 | 60.48 | 53.14 |
| 97/2/11 | 63.96 | 61.86 | 97/4/7 | 60.72 | 53.13 |
| 97/2/12 | 62.89 | 60.85 | 97/4/8 | 61.17 | 52.89 |
| 97/2/13 | 63.18 | 59.92 | 97/4/9 | 60.7 | 53.11 |
| 97/2/14 | 64.25 | 60.81 | 97/4/10 | 61.07 | 54.86 |
| 97/2/17 | 64.25 | 60.81 | 97/4/11 | 60.88 | 53.87 |
| 97/2/18 | 64.16 | 59.42 | 97/4/14 | 61.96 | 54.67 |
| 97/2/19 | 64.68 | 59.59 | 97/4/15 | 61.9 | 54.85 |
| 97/2/20 | 62.78 | 58.04 | 97/4/16 | 60.38 | 53.48 |
| 97/2/21 | 61.82 | 57.85 | 97/4/17 | 60.7 | 54 |
| 97/2/24 | 60.24 | 55.47 | 97/4/18 | 61.49 | 54.68 |
| 97/2/25 | 62.23 | 56.82 | 97/4/21 | 62.8 | 55.48 |
| 97/2/26 | 62.26 | 56.68 | 97/4/22 | 61.77 | 54.83 |
| 97/2/27 | 62.67 | 56.03 | 97/4/23 | 61.74 | 55.65 |
| 97/2/28 | 61.65 | 54.76 | 97/4/24 | 62.84 | 55.89 |
| 97/3/3 | 61.77 | 53.18 | 97/4/25 | 62.5 | 55.9 |
| 97/3/4 | 62.89 | 53.34 | 97/4/28 | 62.34 | 56.53 |
| 97/3/5 | 63.33 | 52.54 | 97/4/29 | 63.36 | 58.91 |
| 97/3/6 | 64.48 | 53.43 | 97/4/30 | 63.91 | 58.07 |
| 97/3/7 | 65.67 | 54.08 | 97/5/1 | 62.63 | 54.33 |
| 97/3/10 | 64.36 | 53.08 | 97/5/2 | 60.52 | 53.02 |
| 97/3/11 | 63.86 | 52.83 | 97/5/5 | 60.54 | 53.05 |
| 97/3/12 | 64.63 | 54.08 | 97/5/6 | 60.31 | 53.53 |
| 97/3/13 | 64.25 | 54.22 | 97/5/7 | 60.92 | 53.08 |
| 97/3/14 | 65.77 | 55.33 | 97/5/8 | 62.5 | 54.38 |
| 97/3/17 | 65.26 | 54.3 | 97/5/9 | 62.89 | 54.52 |
| 97/3/18 | 67.48 | 56.18 | 97/5/12 | 64.47 | 56.65 |
| 97/3/19 | 67.96 | 56.29 | 97/5/13 | 64.76 | 56.48 |
| 97/3/20 | 67.58 | 55.94 | 97/5/14 | 64.38 | 56.42 |
| 97/3/21 | 67.64 | 55.98 | 97/5/15 | 64.04 | 56.48 |
| 97/3/24 | 66.51 | 55.73 | 97/5/16 | 65.87 | 58.47 |
| 97/3/25 | 66.52 | 56.83 | 97/5/19 | 65.21 | 57.92 |
| 97/3/26 | 64.82 | 55.43 | 97/5/20 | 65.39 | 57.64 |
| 97/3/27 | 64.63 | 56.07 | 97/5/21 | 66.53 | 57.55 |
| 97/3/28 | 64.63 | 56.07 | 97/5/22 | 66.93 | 57.8 |
| 97/3/31 | 63.68 | 56.72 | 97/5/23 | 66.92 | 57.52 |

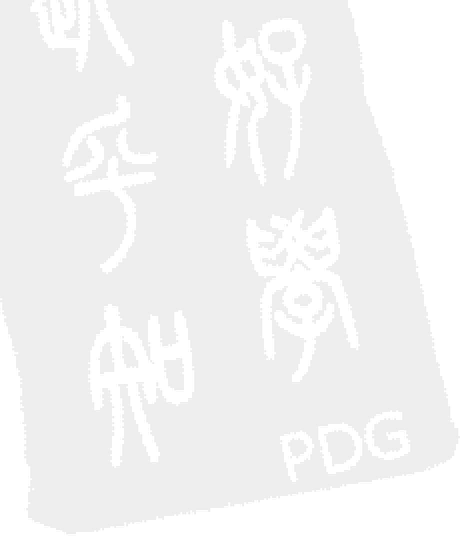
（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 | 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|---|---|---|
| 97/5/26 | 66.92 | 57.52 | 97/7/18 | 60.05 | 52.22 |
| 97/5/27 | 65.38 | 55.27 | 97/7/21 | 60.04 | 52.35 |
| 97/5/28 | 65.8 | 55.39 | 97/7/22 | 60.02 | 52.7 |
| 97/5/29 | 65.15 | 56 | 97/7/23 | 61.12 | 53.28 |
| 97/5/30 | 63.68 | 56.49 | 97/7/24 | 62.21 | 53.39 |
| 97/6/2 | 63.68 | 56.32 | 97/7/25 | 64.03 | 53.99 |
| 97/6/3 | 61.44 | 54.62 | 97/7/28 | 64.84 | 54.14 |
| 97/6/4 | 60.42 | 54.16 | 97/7/29 | 66.47 | 54.31 |
| 97/6/5 | 59.82 | 53.32 | 97/7/30 | 69.9 | 55.78 |
| 97/6/6 | 57.13 | 51.52 | 97/7/31 | 67.84 | 55.61 |
| 97/6/9 | 56.2 | 51.5 | 97/8/1 | 65.07 | 56.56 |
| 97/6/10 | 56.4 | 51.65 | 97/8/4 | 66.74 | 58.44 |
| 97/6/11 | 56.54 | 51.52 | 97/8/5 | 67.1 | 58.32 |
| 97/6/12 | 57.08 | 51.62 | 97/8/6 | 66.06 | 56.98 |
| 97/6/13 | 57.4 | 51.64 | 97/8/7 | 64.33 | 55.3 |
| 97/6/16 | 58.03 | 51.94 | 97/8/8 | 61.99 | 54.29 |
| 97/6/17 | 58.48 | 52.45 | 97/8/11 | 61.47 | 54.36 |
| 97/6/18 | 56.78 | 51.44 | 97/8/12 | 63.71 | 55.1 |
| 97/6/19 | 56.09 | 51.45 | 97/8/13 | 66.08 | 56.04 |
| 97/6/20 | 55.48 | 51.33 | 97/8/14 | 66.33 | 55.87 |
| 97/6/23 | 55.64 | 51.92 | 97/8/15 | 66.81 | 55.25 |
| 97/6/24 | 55.68 | 51.57 | 97/8/18 | 65.44 | 55.09 |
| 97/6/25 | 56.97 | 52.99 | 97/8/19 | 67.58 | 55.71 |
| 97/6/26 | 56.79 | 52.02 | 97/8/20 | 69.64 | 55.1 |
| 97/6/27 | 57.91 | 53.33 | 97/8/21 | 67.15 | 53.48 |
| 97/6/30 | 58.12 | 53.7 | 97/8/22 | 67.48 | 53.41 |
| 97/7/1 | 58.78 | 54.84 | 97/8/25 | 64.5 | 52.2 |
| 97/7/2 | 59.29 | 54.92 | 97/8/26 | 63.81 | 52.09 |
| 97/7/3 | 57.92 | 52.76 | 97/8/27 | 66.4 | 53.26 |
| 97/7/4 | 57.92 | 52.76 | 97/8/28 | 67.51 | 52.51 |
| 97/7/7 | 57.94 | 52.78 | 97/8/29 | 68.82 | 51.85 |
| 97/7/8 | 58.92 | 53 | 97/9/1 | 68.82 | 51.85 |
| 97/7/9 | 58.23 | 52.65 | 97/9/2 | 62.79 | 53.4 |
| 97/7/10 | 58.6 | 52.11 | 97/9/3 | 62.55 | 53.35 |
| 97/7/11 | 59.26 | 52.35 | 97/9/4 | 59.92 | 52.54 |
| 97/7/14 | 58.35 | 51.67 | 97/9/5 | 60.12 | 53.78 |
| 97/7/15 | 59.94 | 52.95 | 97/9/8 | 59.32 | 53.14 |
| 97/7/16 | 60.46 | 52.68 | 97/9/9 | 59.49 | 52.83 |
| 97/7/17 | 61.89 | 53.89 | 97/9/10 | 58.33 | 51.57 |

（续）

| 日期 | 无铅汽油 | 燃料油 |
|---|---|---|
| 97/9/11 | 58.78 | 52.05 |
| 97/9/12 | 58.77 | 52.58 |
| 97/9/15 | 58.22 | 52.52 |
| 97/9/16 | 59.04 | 53.85 |
| 97/9/17 | 58.45 | 53.35 |
| 97/9/18 | 57.25 | 53.44 |
| 97/9/19 | 57.48 | 53.45 |
| 97/9/22 | 58.58 | 54.73 |
| 97/9/23 | 58.36 | 54.64 |
| 97/9/24 | 58.37 | 55.24 |
| 97/9/25 | 59.25 | 56.51 |
| 97/9/26 | 61.34 | 57.92 |
| 97/9/29 | 63.13 | 59.25 |
| 97/9/30 | 62.63 | 58.77 |
| 97/10/1 | 59.9 | 58.19 |
| 97/10/2 | 61.43 | 59.8 |
| 97/10/3 | 62.99 | 62.01 |
| 97/10/6 | 61.3 | 59.69 |
| 97/10/7 | 60.91 | 59.6 |
| 97/10/8 | 61.5 | 60.16 |
| 97/10/9 | 61.18 | 60.08 |
| 97/10/10 | 61.24 | 59.95 |
| 97/10/13 | 59.83 | 58.27 |
| 97/10/14 | 58.88 | 57.01 |
| 97/10/15 | 58.2 | 56.94 |
| 97/10/16 | 59.68 | 58.01 |
| 97/10/17 | 59.31 | 57.4 |
| 97/10/20 | 59.66 | 57.82 |
| 97/10/21 | 59.08 | 57.64 |
| 97/10/22 | 60.79 | 58.77 |
| 97/10/23 | 60.26 | 58.09 |
| 97/10/24 | 59.6 | 57.03 |
| 97/10/27 | 59.95 | 57.74 |
| 97/10/28 | 58.88 | 56.52 |
| 97/10/29 | 60.09 | 57.19 |
| 97/10/30 | 60.67 | 58.12 |
| 97/10/31 | 60.22 | 57.77 |
| 97/11/3 | 59.8 | 58.78 |
| 97/11/4 | 58.96 | 58.11 |
| 97/11/5 | 58.2 | 57.18 |
| 97/11/6 | 59.26 | 57.43 |
| 97/11/7 | 59.95 | 57.99 |
| 97/11/10 | 59.18 | 57.28 |
| 97/11/11 | 59.06 | 57.82 |
| 97/11/12 | 58.62 | 57.92 |
| 97/11/13 | 59.55 | 58.62 |
| 97/11/14 | 60.99 | 59.54 |
| 97/11/17 | 59.44 | 57.85 |
| 97/11/18 | 58.65 | 57.61 |
| 97/11/19 | 58.65 | 56.67 |
| 97/11/20 | 57.22 | 55.45 |
| 97/11/21 | 57.74 | 55.48 |
| 97/11/24 | 58.69 | 55.6 |
| 97/11/25 | 59.08 | 55.49 |
| 97/11/26 | 57.31 | 53.1 |
| 97/11/27 | 57.31 | 53.1 |
| 97/11/28 | 57.31 | 53.1 |
| 97/12/1 | 56.25 | 52.71 |
| 97/12/2 | 56.43 | 53.25 |
| 97/12/3 | 56.55 | 53.5 |
| 97/12/4 | 56.34 | 53.35 |
| 97/12/5 | 56.59 | 53.38 |
| 97/12/8 | 56.96 | 53.52 |

241～249



# 索　引

索引中的页码为英文原书的页码，与书中边栏的页码一致。

**D**



**E**



**F**



**G**



**H**



**I**